Universidade Técnica de Lisboa

Instituto Superior de Economia

O Controlo Óptimo em Economia

MARIA CÂNDIDA RODRIGUES FERREIRA

Tese de Mestrado em Economia realizada sob a orientação do Professor Doutor João Ferreira do Amaral

Lisboa
Setembro de 1989

À JOANA

Não será mera formalidade a afirmação de que este trabalho não teria sido possível sem o acompanhamento directo e a sempre inteira disponibilidade do Prof. Ferreira do Amaral que, com as suas críticas e sugestões permitiu aclarar vectores de análise e eliminar erros e omissões de versões prévias, sem prejuízo, como é óbvio, de os que ainda permanecem serem da inteira responsabilidade da autora.

Uma palavra de agradecimento também aos outros professores que leccionaram a parte escolar do Mestrado de Economia que facilitaram a consolidação de conhecimentos e introduziram em novas áreas, nomeadamente o controlo óptimo que despertou o interesse de continuar a investigação.

Não poderão ser esquecidos os colegas e amigos solidários nos momentos mais difíceis, nomeadamente a Drª Margarida Chagas Lopes, Drª Maria Paula Santos, Drª Isabel de Deus Mendes, Dr. António Daniel dos Santos, Dr. Manuel Teixeira, Dr. Ennes Ferreira, Dr. Onofre Simões, pedindo desculpa aos restantes pela omissão dos seus nomes mas não das suas presenças.

Expresso também o meu reconhecimento aos meus pais pelo apoio incondicional em todos os momentos e à minha filha pela alegria que transmite.

INTRODUÇÃO

A teoria do controlo abrange os métodos que permitem a regulação dos sistemas, tanto nos casos em que o processo de regulação é automático (teoria clássica da automática) como nas situações em que intervêm agentes decisores utilizando as técnicas da <u>teoria do controlo óptimo</u> (1).

O controlo óptimo surge e desenvolve-se primeiro nas ciências "exactas" onde ainda hoje é largamente utilizado. (2) A sua aplicação a uma ciência social como a economia tornou-se possível após os trabalhos pioneiros sobre o funcionamento dos sistemas económicos, assim como do desenvolvimento da área mais geral da análise sistémica e modelização social.

Com o incremento de estudos sobre os sistemas dinâmicos e das características dinâmicas da economia, a par da área dos modelos econométricos e divulgação dos meios informáticos, as técnicas do controlo óptimo são cada vez mais utilizadas na área económica, nomeadamente no estudo de questões como o crescimento económico, estabilização económica, exploração de recursos naturais, gestão de empresas ou política económica, entre outras.

O reconhecimento do carácter dinâmico e estocástico do funcionamento dos sistemas económicos conduz à utilização das técnicas do controlo óptimo em conjugação com os modelos estocásticos dinâmicos, introduzindo-se a possibilidade da inclusão da incerteza dos parâmetros dos modelos nos cálculos do controlo óptimo.

Perante as alternativas de decisão que muitas vezes são em grande número e os recursos e tempo para as escolher, que normalmente são escassos, o controlo óptimo pode contribuir para uma selecção mais eficiente e sistemática das opções dos agentes decisores.

Apesar da aceitação geral das possibilidades de aplicação dos modelos e técnicas matemáticas utilizados noutras ciências e, concretamente do controlo óptimo, à área económica, há no entanto críticas e cuidados a ter presentes quando interpretamos os resultados que nos fornecem. Não basta admitir que os sistemas económicos têm estruturas e funcionamentos semelhantes a outros sistemas, a sua regulação pressupõe quantificação da informação das respostas que fornecem a determinados inputs e da melhor actuação do decisor para atingir os objectivos escolhidos.

Assim, o controlo óptimo deve ser encarado como uma técnica auxiliar em processos de decisão e regulação, com a consciência de que os modelos econométricos utilizados nem sempre são de confiança e de que a maior parte das decisões, na prática, acabam por ser tomadas com incerteza. Mas, isto não impede que se procure uma análise quantitativa o mais racional possível e, já que as decisões têm que ser tomadas "é mais perigoso para os responsáveis pelas decisões esconder os pressupostos sobre a economia em que se baseiam do que apresentar esses pressupostos explicitamente e de forma quantitativa, i. e. sob a forma de um modelo matemático"(3).

Em Portugal a regulação dos modelos macroeconómicos foi o tema abordado pelo Prof. Victor Martins (1983), explicitando alguns dos conceitos básicos da teoria do controlo e a sua combinação com a teoria da política económica. O Prof. Junqueira Lopes também publicou trabalhos (1981, 1985 e 1987) sobre a teoria e as técnicas do controlo óptimo com aplicação à exploração dos recursos naturais, designadamente da pesca. O Cálculo de Variações foi utilizado na apresentação de um modelo de crescimento económico pelo Prof. Ferreira do Amaral (1979) e o Prof. Patinha Antão aplicou o Princípio de Pontryagin na dissertação de doutoramento que defendeu no I.S.E. em 1989.

O objectivo do nosso trabalho é a apresentação das técnicas de regulação da teoria do controlo óptimo e alguns exemplos da sua aplicação a problemas económicos.

Começamos por referir alguns conceitos básicos necessários para a formalização de um problema geral a resolver com as técnicas do controlo óptimo. Apresentamos depois os três métodos conhecidos de resolução dos problemas: o Cálculo de Variações, o Princípio de Pontryagin e a Programação Dinâmica, detendo-nos nas possibilidades de interpretação dos problemas da esfera económica.

O controlo óptimo estocástico será introduzido com destaque para a obra de Gregory Chow que conjuga estas técnicas com os modelos dinâmicos econométricos e apresenta uma metodologia de análise das questões relevantes para a política económica. Terminamos com um exemplo simples de aplicação de um ponto da metodologia de Chow à economia portuguesa.

(1) Martins (1983), pag. 11

(2) a título de exemplo refira-se Beck (1981-a e b) assim como a revista <u>European Journal of Operational Research</u>, Elsevier Science Publishers B.V. (North-Holland), onde se encontram muitos exemplos de aplicação das técnicas do controlo óptimo, entre os quais Tavares,L.V. e outros (1986) , onde se analisa um sistema de suporte de decisão para melhorar o sistema energético português, e Tavares,L.V.(1986), uma aplicação aos projectos de transporte ferroviário da área metropolitana do Porto.

(3) Chow (1975), pag.211-212

1. CONCEITOS BASICOS E FORMALIZAÇÃO GERAL DE PROBLEMAS DO CONTROLO OPTIMO

Ao formalizar o problema do controlo óptimo para a regulação de qualquer sistema económico dinâmico o decisor dispõe de um elemento fundamental, o tempo. As suas decisões terão sempre um carácter intertemporal, já que as escolhas realizadas em determinado momento condicionam a evolução do sistema e, consequentemente, as suas próprias decisões futuras.

Em cada momento **t** do tempo definido no intervalo $[0,T]$ o sistema apresenta determinadas características, definidas por um número finito de variáveis reais, que se supõem funções contínuas do tempo - as variáveis de estado, que constituem o vector de estado.

Admitindo que o sistema é "não-hereditário" ou de tipo markoviano, as variáveis de estado resumem toda a história passada do sistema. Esta hipótese supõe ainda que tenhamos possibilidades de definir um conjunto de indicadores económicos que descrevam completamente o estado do sistema e é por vezes modificada.

Ao longo do intervalo $[0,T]$, desde o estado inicial:

$$x_i\ (0) = a_i \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

que se supõe conhecido, ao estado final:

$$x_i\ (T) = b_i \qquad i = 1, 2, \ldots, p$$

que pode ou não ser pré-determinado, as variáveis de estado evoluem, definindo a trajectória de estado:

$$\{\ \vec{x}\ (t)\ \}$$

as trajectórias de estado são também por hipótese funções contínuas do tempo, definidas em cada momento pelos valores do vector de estado.

O decisor, normalmente considerado como uma só entidade mas, podendo ser também encarado como colectivo (ex.situações de oligopólio), dispõe de instrumentos para actuar, definidos como um conjunto de variáveis reais, as variáveis de controlo e que formam o vector de controlo.

Para que os vectores de controlo sejam considerados admissíveis é necessário que pertençam a um sub-conjunto não vazio do espaço euclidiano de determinada dimensão, que normalmente se assume compacto, (i.e.fechado e limitado), convexo e não dependente do tempo.

Se o estado final do sistema for definido a priori, um vector de controlo será realizável se, além de admissível, permitir que o sistema se desloque do estado inicial conhecido para o estado final que se pretende atingir. Quando se utilizam apenas controlos admissíveis, a trajectória de estado do sistema é realizável e os vectores de estado que a definem são realizáveis.

Tal como as variáveis de estado, também as de controlo evoluem ao longo do intervalo, determinando a trajectória de controlo:

$$\{ \vec{u}(t) \}$$

que por hipótese é também uma função do tempo, seccionalmente contínua, determinada em cada momento pelos valores do vector de controlo.

Nos problemas de controlo óptimo utilizam-se dois tipos de controlos:

1) controlos de tipo "open loop" - em que a trajectória de controlo se determina completamente no início do intervalo e apenas como função do tempo:

$$\{ \vec{u} (t) \}$$

Em economia são raros os exemplos de controlos deste tipo mas, podemos supor que a taxa de crescimento da oferta monetária seja determinada no início do ano e mantida até ao final sem atender a possíveis alterações da conjuntura económica.

2) controlos de tipo "closed loop" - a trajectória de controlo é função não apenas do tempo mas também dos vectores de estado que se vão obtendo ao longo do intervalo:

$$\{\vec{u} [\vec{x}(t), t] \}$$

Neste caso as decisões sobre os controlos vão sendo revistas de acordo com as informações sobre a evolução do estado do sistema. São os controlos mais utilizados nos sistemas económicos, presentes em qualquer estabilizador automático.

Num problema de controlo óptimo, um controlo de tipo "closed loop" só tem sentido se supusermos a existência de variáveis aleatórias no modelo. Caso contrário, os resultados serão idênticos aos obtidos com um controlo de tipo "open loop".

Para definir a evolução do sistema de um estado para outro utilizam-se as equações de estado ou de comportamento:

$$x_i (t+ t) =x_i + f_i [x_1(t),...,x_n(t); u_1(t),...,u_m;t] \quad t$$

$$i = 1,2,...n$$

onde: $x_i(t)$ são as variáveis de estado

$\vec{x}(t) = x_1(t),...,x_n(t)$ é o vector de estado

$\vec{u}(t) = u_1(t),...,u_m(t)$ é o vector de controlo

e t representa a variável que traduz o efeito dos factores exógenos que interferem na evolução do sistema.

Na linha de Intriligator (1971) muitos autores identificam **t** com o tempo, mas, poderá ser também identificado com outros factores como o progresso técnico ou o crescimento da força de trabalho - Arrow (1967). A não consideração de factores exógenos nas equações de comportamento torna os sistemas <u>estacionários.</u>

Até aqui temos considerado o elemento **tempo** de forma contínua, i.e., as variáveis de estado e de controlo como funções do tempo, e neste caso as equações de comportamento do sistema definem-se como equações diferenciais:

$$x_i(t) = \frac{dx_i(t)}{dt} = f_i\ [\ \vec{x}(t),\ \vec{u}(t), t\ ] \quad i=1,2,...n$$

Por hipótese as funções f_i são conhecidas e continuamente diferenciáveis. Para condições nos limites das equações de comportamento consideram-se os valores do vector de estado inicial do sistema.

A este estado inicial e uma dada trajectória de controlo corresponderá sempre apenas uma trajectória de estado, capaz de satisfazer as equações de comportamento e as condições nos limites, que se pode determinar pela integração das equações de comportamento.

Para a formalização de um problema geral de controlo óptimo falta-nos ainda definir a função que traduzirá o objectivo do decisor ao actuar sobre o sistema e que, no caso dos sistemas económicos se traduz normalmente numa procura de maior utilidade, bem-estar, lucro, ou menores custos, etc. Define-se pois um funcional, i.e. uma função de funções, como uma sequência de trajectórias de controlos admissíveis a que correspondem números reais que nos indicam a valorização do sistema em cada momento do intervalo considerado.

No caso mais geral a _função objectivo_ apresenta a forma:

$$J = J\ \{\ \vec{u}(t)\}\ = \int_0^T [\ I\ \ \vec{x}(t),\ \vec{u}(t),\ t]\ dt + F\ [\ \vec{x}(T),\ T]$$

O integrando do primeiro termo designa-se por _função intermédia_ demonstra a dependência do funcional das trajectórias de estado e de controlo e dos factores exógenos, e traduz o valor acrescentado para o objectivo definido, em cada momento do intervalo:

$$I\ [\vec{x}(t),\ \vec{u}(t),\ t] = I\ [x_1(t),\ldots,x_n(t);u_1(t),\ldots,u_m(t);\ t]$$

com $\quad 0 \leq t \leq T$

O segundo termo da expressão, _a função final_, mostra a dependência do funcional do estado final do intervalo, e determina o valor que se atribui a esse estado final:

$$F\ [\ \vec{x}(T),T]\ = F\ [\ x_1(T),\ldots,x_n(T);\ T\ ]$$

Utilizando aquela formulação para a função objectivo, o problema geral do controlo será:

Determinar os vectores de controlo $u_1(t),...,u_m(t)$, com $0 \leq t \leq T$, que sejam admissíveis e maximizem (ou minimizem) o funcional:

$$J = \int_0^T I [\vec{x}(t), \vec{u}(t), t] dt + F [\vec{x}(T), T]$$

com:
$$\vec{x}'(t) = g [\vec{x}(t), \vec{u}(t), t]$$
$$\vec{x}(0) = a$$

Com esta formulação da função objectivo o problema é muitas vezes designado por <u>Problema de Bolza</u>, mas há outras formulações possíveis.

Se considerarmos que o valor do estado final do sistema é nulo, i.e. $F [\vec{x}(T), T] = 0$, teremos o <u>Problema de Lagrange</u>:

$$J = \int_0^T I [\vec{x}(t), \vec{u}(t), t] dt$$

Se desprezarmos as contribuições para o objectivo medidas pela função intermédia, considerando-as identicamente zero, i.e. $I [\vec{x}(t), \vec{u}(t), t] = 0$, teremos o <u>Problema de Mayer</u>:

$$J = F [\vec{x}(T), T]$$

As três formulações são, no entanto, equivalentes, já que por definições sucessivas das variáveis é possível transformar uma nas outras.

Quando aplicamos o controlo óptimo a sistemas económicos, nem sempre tem sentido considerarmos o tempo contínuo, mas o problema geral do controlo óptimo também pode ser formulado para <u>sistemas discretos</u>. Neste caso teremos:

Determinar os vectores de controlo $u_1(t), \ldots, u_m(t)$, com $t = 0, 1, \ldots, N$, que sejam admissíveis e maximizem (ou minimizem) o funcional:

$$J = \sum_{t=0}^{N-1} L\,[\,\vec{x}(t),\ \vec{u}(t),\ t\,]$$

com:

$$\vec{x}\,(t+1) - \vec{x}\,(t) = f\,[\,\vec{x}(t),\ \vec{u}(t),\ t\,]$$

$$\vec{x}\,(0) = a$$

O problema geral do controlo óptimo aqui apresentado permite alterações na sua formulação de forma a adaptar-se aos sistemas concretos que se pretende regular. Para a sua resolução desenvolveram-se os métodos do Cálculo de Variações, Princípio de Pontryagin e Programação Dinâmica que serão objecto de análise nos próximos pontos.

2. CALCULO DE VARIAÇöES

A origem do Cálculo de Variaçöes remonta a uma questão formulada por Galileu em 1630 (1) e que ficou conhecida como o problema de "brachistochrone" - do grego **brachistos**, (mais curto) e **chronos**, (tempo), com a seguinte formulação matemática:

Determinar, no intervalo [0,T] o vector $\vec{x}(t)$ que minimiza (ou maximiza) o funcional:

$$J(x) = \int_{0}^{T} I\ [\ \vec{x}(t),\ \vec{x}'(t),\ t\ ]\ dt$$

sendo $\vec{x}(t)$ o vector que caracteriza o estado do sistema no momento t e $\vec{x}'(t) = dx/dt$

A primeira solução que se conhece para este problema foi apresentada por John Bernoulli em 1696. Mas, a questão despertou o interesse de mais estudiosos e, nomes como os de Euler, Legendre, Weierstrass e Lagrange, entre outros, surgem ligados ao seu desenvolvimento que chegou aos nossos dias com a designação de CALCULO DE VARIAÇöES.

As condições necessárias para a resolução de problemas do cálculo de variações podem ser generalizadas a problemas de controlo óptimo. Começaremos por apresentá-las, distinguido várias situações: de estado final imposto, estado final livre, duração do intervalo desconhecida, o caso multidimensional e, ainda a introdução de restrições.

Analisaremos depois algumas das possibilidades de interpretação das soluções e da aplicação deste método a problemas da esfera económica.

2.1. EQUAÇÃO DE EULER - CONDIÇÕES DE 1ª ORDEM

2.1.1. Estado final pré-determinado

Neste caso o problema será:

Determinar no intervalo [0.T] a função $x(t)$ que maximiza (minimiza) o funcional:

$$J = \int_0^T I[\,x(t),\, x'(t),\, t\,]\, dt$$

dados

$$x(0) = a$$
$$x(T) = b$$

Designando por X o conjunto de funções deriváveis no intervalo [0,T] que satisfazem as condições definidas para os limites do intervalo, se $x(t)$ pertencer a este conjunto e $wx(t)$ for também derivável e tivermos :

$$wx(0) = 0 \quad e \quad wx(T) = 0$$

podemos concluir que a função $x(t) + wx(t)$ também pertence ao conjunto X.

Diferenciando o funcional em $x(t)$ e, uma vez que nos limites $wx(t)$ se anula, obtemos:

$$wJ = \int_0^T \{ \frac{\delta I[x(t),x'(t),t]}{\delta x(t)} - \frac{d}{dt} [\frac{\delta I[x(t),x'(t),t]}{\delta x'(t)}]\} wx(t)\ dt$$

Admitindo que existe um valor de x(t) que maximiza o funcional, wJ tem que ser necessariamente nulo, qualquer que seja a especificação de wx(t). Obtemos assim a condição necessária de maximização - Equação de Euler (2):

A solução x(t) do problema deve satisfazer a equação:

$$\frac{\delta I[x(t),x'(t),t]}{\delta x(t)} - \frac{d}{dt}\left[\frac{\delta I[x(t),x'(t),t]}{\delta x'(t)}\right] = 0$$

e as condições:

$$x(0) = a$$

$$x(T) = b$$

2.1.2. Estado final livre

Quando o estado final não é determinado à priori o problema tem a formulação:

Determinar no intervalo [0,T] a função x(t) que maximiza (minimiza) o funcional:

$$J = \int_0^T I[x(t), x'(t), t]\, dt$$

com

$$x(t) = a$$

Retomando a metodologia do caso anterior podemos escrever

$$wJ = \left[\frac{\delta I[x(t),x'(t),t]}{\delta x'(t)} \quad wx(t)\right]_0^T + \int_0^T \left\{\frac{\delta I[x(t),x'(t),t]}{\delta x(t)} - \frac{\delta I[x(t),x'(t),t]}{\delta x'(t)}\right\} wx(t)\, dt$$

e uma vez que se deve verificar a equação de Euler e que $wx(0) = 0$, obtemos:

$$wJ = \left[\frac{\delta I[x(t),x'(t),t]}{x'(t)} \; w\, x(t) \right]_0^T = \frac{\delta I[x(T),x'(T),T]}{\delta\, x'(T)} \; w\, x(T)$$

ou seja, para que $wJ = 0$, qualquer que seja $x(T)$ temos:

$$\frac{\delta\ I\ [x(T),x'(T),T]}{\delta\ x'(T)} = 0 \quad = \text{condição de transversalidade}$$

Assim, para respeitar as <u>condições de primeira ordem,</u> a função $x(t)$ que maximiza o funcional deverá:

a) verificar a equação de Euler

b) satisfazer as condições nos limites:

a condição inicial, i.e. $x(0) = a$ e

a condição de transversalidade

2.1.3. <u>Tempo de duração livre</u>

Conhecendo-se o estado inicial do sistema e o estado final que se pretende mas não o tempo que se demora a lá chegar o problema será:

Calcular o momento T e a função x(t) que satisfaçam:

$$\text{Max } J = \int_0^T I\ [\ x(t),\ x'(t),\ t]\ \ dt$$

$$x\ (0) = a$$

$$x\ (T) = b$$

Nestas condições teremos

$$wx(0) = 0$$

$$wx(T) + x'(T)\, wT = 0 \quad e$$

$$wJ = \left[I[x(T),x'(T),T] - x'(T) \frac{\delta I[x(T),x'(T),T]}{\delta x'(T)} \right] wT + $$

$$+ \int_0^T \left[\frac{\delta I[x(t),x'(t),t]}{\delta\, x(t)} - \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\delta I[x(t),x'(t),t]}{\delta\, x'(t)} \right\} \right] wx(t)\, dt$$

Para que wJ se mantenha nulo, quaisquer que sejam wx(t) e wT, além de se verificar a equação de Euler, a primeira parcela da expressão anterior também se deve anular, permitindo-nos calcular a data T.

Nesta situação, as <u>condições de primeira ordem</u> indicam que para que a solução x(t) seja óptima terá que:

a) verificar a equação de Euler

b) satisfazer as condições nos limites :

$$x(0) = a$$

$$x(T) = b$$

sendo o momento T definido por:

$$I[x(T),x'(T),T] - x'(T) \frac{\delta I[x(T),x'(T),T]}{\delta\, x'(T)} = 0$$

2.1.4. <u>Problemas Multidimensionais</u>

Os resultados anteriores podem ser generalizados para situações em que em vez de funções de uma só variável, temos vectores de estado e de controlo com várias variáveis.

Nesse caso teremos o funcional:

$$J = \int_0^T I\,[\,\vec{x}(t),\ \vec{x}'(t),\ t\,]\ dt$$

As condições de Euler formam um sistema de n equações diferenciais, com n incógnitas:

$$\frac{\delta I[\vec{x}(t),\vec{x}'(t),t]}{\delta\,\vec{x}(t)} - \frac{d}{dt}\,\frac{\delta I[\vec{x}(t),\vec{x}'(t),t]}{\delta\,\vec{x}'(t)} = 0$$

$$\vec{x} = \{x_1(t),\ldots,x_n(t)\}$$

Para a definição das condições nos limites separamos as variáveis de estado em dois subconjuntos:

$x_i = \{\,x_1,\ldots,x_k\}$ = variáveis com estado final pré-determinado

$x_j = \{\,x_{k+1},\ldots,x_n\}$ = variáveis com estado final livre

e teremos:

$$x_i\ (0) = a_i$$

$$x_i\ (T) = b_i$$

$$x_j\ (0) = a_j$$

$$\frac{\delta\ I\ [x_j(T),x_j'(T),T]}{\delta\ x_j(T)} = 0$$

com $i = 1,\ldots,k$ e $j = k+1,\ldots,n$

Se a duração do intervalo não for definida a priori a data final T poderá ser determinada pela condição de transversalidade:

$$I\ [\vec{x}(T),\vec{x}'(T),T] - \sum_{i=1}^{n} x'_i(T)\ \frac{\delta I[x_i(T),x'_i(T),T]}{\delta\ x_i(T)} = 0$$

2.1.5. Problema de Lagrange

A introdução de restrições sob a forma de igualdades transformam o problema anterior no já referido problema de Lagrange /Mayer /Bolza , uma vez que é possível definir as variáveis de controlo em função das variáveis de estado, dos multiplicadores e do tempo (3).

Na sua resolução generaliza-se o método de Lagrange com a introdução de um vector de multiplicadores de Lagrange associados às restrições:

$$\vec{m} = \{ m_1(t), \ldots, m_p(t) \}$$

de forma que a função:

$$M[\vec{x}(t),\vec{x}'(t),\vec{m}(t),t] = I[\vec{x}(t),\vec{x}'(t),t] - \sum_{j=1}^{p} m_j(t) f_j[\vec{x}(t),\vec{x}'(t),t]$$

satisfaça as condições de primeira ordem:

$$\frac{\delta M}{\delta x_i(t)} - \frac{d}{dt}\frac{\delta M}{\delta x'_i(t)} = 0$$

Com as condições nos limites:

$$x_i\ (0) = a_i$$

$$x_i\ (T) = b_i$$

$$x_j\ (0) = a_j$$

$$\frac{\delta M[\vec{x}(T),\vec{x}'(T),\vec{m}(T),T]}{\delta x'_j(T)} = 0$$

onde x_i são as variáveis com estado final imposto, $i = 1,\ldots,k$ e x_j são as variáveis com estado final livre, $j = k+1,\ldots,n$

Se não for dada a data T, será calculada pela condição de transversalidade:

$$M\,[\vec{x}(T),\ \vec{x}'(T),\ \vec{m}(T),\ T] - \sum_{i=1}^{n} x'_i(T)\,\frac{\delta M}{\delta x'_i(T)} = 0$$

Se as restrições forem introduzidas sob a forma de **desigualdades** utilizam-se multiplicadores de Kuhn-Tucker generalizados:

$$\vec{g} = \{ g_1(t), \ldots g_q(t) \}$$

tais que a função:

$$M[\vec{x}(t),\vec{x}'(t),\vec{g}(t),t] = I[\vec{x}(t),\vec{x}'(t),t] - \sum_{j=1}^{q} g_j(t)h_j[\vec{x}(t),,\vec{x}'(t),t]$$

satisfaça as equações de Euler e ainda as seguintes condições:

$$g_j(t) \geq 0 \quad \text{e}$$

$$g_j(t)\ h_j\ [\vec{x}(t),\ \vec{x}'(t),\ t] = 0 \quad \text{com } j = 1,\ldots,q$$

Expressões que generalizam os resultados da programação não linear a problemas multidimensionais.

2.2. CONDIÇÕES DE LEGENDRE E WEIERSTRASS - CONDIÇÕES DE 2ª ORDEM

As condições de Euler são condições necessárias de primeira ordem e como tal não distinguem as soluções de máximo das de mínimo nem identificam possíveis pontos de inflexão.

As condições de segunda ordem , apesar de serem também apenas necessárias, vão-nos permitir distinguir uma solução que conduz a um máximo de outra que conduz a um mínimo (condição de

Legendre), e eliminar os extremos locais (condição de Weierstrass).

Assim, tomando como exemplo os problemas com estado final pré-determinado temos:

<u>Condição de Legendre</u>:

Uma solução óptima da equação de Euler, $I^* [\vec{x}^*(t), \vec{x}'^*(t), t]$ deve satisfazer:

$$\frac{\delta^2 I^* [\vec{x}^*(t), \vec{x}'^*(t), t]}{\delta [\vec{x}'^*(t)]^2} \leq 0 \text{ se o problema for de } \textbf{maximização}$$
$$\geq 0 \text{ se for de } \textbf{minimização}$$

<u>Condição de Weierstrass</u>:

Para que uma solução óptima da equação de Euler seja um máximo (mínimo) absoluto, a função:

$$W[\vec{x}^*(t), \vec{x}'^*(t), \vec{x}'(t), t] = I[\vec{x}^*(t), \vec{x}'(t), t] -$$
$$- I^*[\vec{x}^*(t), \vec{x}'^*(t), t] - [\vec{x}'(t) - \vec{x}'^*(t)] \frac{\delta I^* [\vec{x}^*(t), \vec{x}'^*(t), t]}{\delta \vec{x}'(t)}$$

deve ser ≤ 0 para um **máximo** absoluto e

≥ 0 para um **mínimo** absoluto.

Com as alterações necessárias na formalização das funções multidimensionais, estas condições são facilmente generalizaveis a todos os outros problemas apresentados no ponto anterior.

2.3. INTERPRETAÇÃO ECONOMICA

A utilização do cálculo de variações na resolução de problemas de controlo óptimo terá que obedecer às condições matemáticas formuladas no ponto anterior. Pela resolução da Equação de Euler conseguimos determinar a taxa a que deve variar o estado do sistema, $x'(t)$, que garante a optimização do problema ao longo de todo o intervalo.

Para a interpretação económica desta equação vamos admitir a existência de uma trajectória óptima para a variável de controlo, $x'^{*}(t)$, e que o sistema se encontra num qualquer momento $0 \leq t \leq T$. Supondo que a partir desse momento se segue a trajectória óptima a soma das contribuições para o objectivo no intervalo $[t,T]$ dependerá apenas do estado do sistema no momento t e da data escolhida e poderá ser definida pela função:

$$M^{*}[x(t), t] = \int_{t}^{T} I[x^{*}(\tau), x'^{*}(\tau), \tau]\, d\tau$$

Dividindo o intervalo $[t,T]$ em dois períodos, $(t, t+dt)$ e $(t+dt, T)$, podemos escrever

$$M^{*}[x(t),t] = I[x(t),x'^{*}(t),t]\, dt + \int_{t+dt}^{T} I[x^{*}(\tau),x'^{*}(\tau),\tau]\, d\tau$$

com $t \leq \tau \leq T$

Pela definição de $M^{*}[x(t),t]$

$$M^{*}[x(t),t] = I[x(t),x'^{*}(t),t]\, dt + M^{*}[x(t+dt),t+dt]$$

uma vez $x'^*(t)$ é a trajectória que conduz ao resultado óptimo temos

$$M^* [x(t),t] = \underset{}{Max} \{I [x(t),x'(t),t] dt + M^* [x(t+dt),t+dt]\}$$

desenvolvendo em série de Taylor limitada

$$M^*[x(t+dt),t+dt] = M^*[x(t),t] + \frac{\delta M^*}{\delta x(t)} x'(t)dt + \frac{\delta M^*}{\delta t} dt$$

obtemos

$$\underset{x'(t)}{Max} \{ I[x(t),x'(t),t] + \frac{\delta M^*}{\delta x(t)} x'(t) \} = \frac{\delta M^*}{\delta t}$$

Esta última expressão, conhecida como <u>Equação de Hamilton-Jacobi</u> permite a interpretação económica das condições de primeira ordem .

Sendo

$$y(t) = \frac{\delta M^*}{\delta x(t)} = \text{contribuição marginal para o objectivo}$$

i.e. a variação do objectivo máximo atingível no intervalo, devida à alteração de uma unidade no estado do sistema no momento t, e uma vez que a variação desse estado, x'(t) conduz ao máximo de

$$I [x(t), x'(t), t] + \frac{\delta M^*}{\delta x(t)} x'(t)$$

anulando a derivada desta expressão em ordem a x'(t) obtemos

$$\frac{\delta I[x(t),x'(t)t]}{\delta x'(t)} + \frac{M^*[x(t),t]}{\delta x(t)} = 0$$

i.e.

$$y(t) = - \frac{\delta I [x(t), x'(t), t]}{\delta x'(t)}$$

Expressão que nos indica que ao longo da trajectória óptima, $x'^{*}(t)$, as consequências imediatas para o objectivo devidas à alteração unitária do estado no momento t, que nos são dadas por $\delta I/\delta x'(t)$, têm que ser necessáriamente iguais aos seus efeitos marginais no futuro, derivados da alteração do estado, $x(t)$, do sistema, determinada por $y(t)$.

Resultado que comprova a já referida interdependência temporal das decisões sobre os controlos.

Introduzindo agora o valor óptimo do controlo na equação de Hamilton-Jacobi

$$I[x(t), x'^{*}(t), t] + \frac{\delta M^{*}}{\delta x(t)} x'^{*}(t) = - \frac{\delta M^{*}}{\delta t}$$

e derivando em ordem a $x(t)$ obtemos

$$\frac{\delta I [x(t), x'^{*}(t), t]}{\delta x(t)} + \frac{\delta M^{*} [x(t), t]}{\delta^{2} x(t)} p'^{*}(t) = 0$$

i.e. $$\frac{\delta I[x(t), x'^{*}(t), t]}{\delta x(t)} = - \frac{\delta}{\delta t} \frac{\delta M^{*}}{\delta x(t)}$$

e, uma vez que $y(t) = \delta M^{*}/\delta x(t)$ só depende de t se seguirmos ao longo da trajectória óptima, temos

$$- \frac{d}{dt} y(t) = \frac{\delta I^{*} [x^{*}(t), x'^{*}(t), t]}{\delta x(t)}$$

equação que nos permite concluir que um desvio da trajectória óptima, i.e. a alteração de uma unidade do estado x no momento **t**, conduz a uma diminuição da contribuição marginal para o objectivo ao longo do intervalo num montante de

$$- \frac{d}{dt} \; y(t)$$

montante esse que é exactamente igual à perda do objectivo devida à alteração do estado do sistema no momento **t**, medida por

$$\frac{\delta I^{*} [x^{*}(t), x'^{*}(t), t]}{\delta \, x(t)}$$

Combinando esta última expressão com a que nos indica a igualdade dos efeitos imediatos e futuros da alteração da trajectória reencontramos a <u>equação de Euler</u>

$$\frac{\delta \; I}{\delta \; x(t)} - \frac{d}{dt} \; \frac{\delta \; I}{\delta \; x'(t)} = 0$$

que determina qual a taxa a que deve variar o estado do sistema para seguirmos a trajectória que nos garante a optimização do objectivo longo de todo o intervalo.

O cálculo de variações é utilizado em problemas de determinação de preços que maximizem funções de lucro (4), de escolha de programas de produção, investimentos ou publicidade (5), maximização da utilidade do consumidor, exploração de recursos naturais (6), e exemplos tão diversos como os apresentados por Kamien e Schwartz (7) de controlo do funcionamento de um sistema mecânico com custos de falhas (8) localização de dois grupos etários vizinhos numa cidade (9), utilização de terrenos também numa cidade (10), etc.

No entanto , a utilização deste método em exemplos económicos pressupõe a aceitação de hipóteses de continuidade que muitas vezes se revelam demasiado restritivas e incompatíveis com as situações empíricas.

O cálculo de variações mostra-se adequado sobretudo a problemas teóricos e autores como Helmer defendem que a sua área privilegiada de aplicação são os modelos de crescimento óptimo de uma economia pelo seu carácter dinâmico e a interdependência entre as decisões de um período e a actividade económica dos períodos seguintes (11).

(1) Com o seguinte enunciado:

Suponhamos que temos uma conta para enfiar num fio com duas extremidades, a primeira, o ponto A, situa-se acima da segunda, o ponto B. A conta desloca-se ao longo do fio sem atrito, sujeita apenas às leis da gravidade. Qual deverá ser a curva descrita pelo fio para que a conta deslize do ponto A ao ponto B o mais depressa possível?

A formalização matemática do problema baseia-se em noções elementares da geometria (Teorema de Pitágoras) e da física (velocidade) - Miller (1979), cap.2

(2) A resolução da equação de Euler levanta muitas vezes dificuldades. Mas há casos em que ela nos aparece simplificada:

1) Quando I = I [x'(t), t] a Equação de Euler reduz-se a

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\delta I\,[x'(t),t]}{\delta\, x'(t)}\right] = 0$$

o que torna $\delta I \,/\, \delta x'$ = const.

2) Quando I = I [x(t), x'(t)] , caso estacionário, a equação de Euler é:

$$\frac{d}{dt}\left\{I[x(t),x'(t)] - \frac{\delta I[x(t),x'(t)]}{\delta x'(t)}\, x'(t)\right\} - \frac{\delta I[x(t),x'(t)]}{\delta t} = 0$$

pelo que $I - (\delta I/\delta x')x'$ = const. com $0 \le t \le T$

3) Quando I = I [x(t), t] temos a equação de Euler

$$\frac{\delta\, I\,[\,x(t),\,t]}{\delta\, x(t)} = 0$$

que não é uma equação diferencial.

(3) O problema geral do controlo óptimo pode ser resolvido com os resultados do cálculo de variações, associando a cada uma das restrições (equações de comportamento) multiplicadores de Lagrange e construindo-se a função:

$$M\,[\vec{x}(t),\vec{x}'(t),\vec{u}(t),\vec{m}(t),t] = I\,[\vec{x}(t),\vec{u}(t),t] -$$

$$-\sum_{j=1}^{n} m_j(t)\,\left\{x'_j - f_j[\vec{x}(t),\vec{u}(t),t]\right\}$$

podemos aplicar as condições de Euler:

$$\frac{\delta M}{\delta \vec{x}(t)} - \frac{d}{dt}\frac{\delta M}{\delta \vec{x}'(t)} = 0$$

e obtemos para as **n** variáveis de estado:

$$\frac{\delta I[\vec{x}(t),\vec{u}(t),t]}{\delta x_i(t)} + \sum_{j=1}^{n} m_j(t) \frac{\delta f_j[\vec{x}(t),\vec{u}(t),t]}{\delta x_i(t)} - m'_j(t) = 0$$

$$i=1,\ldots,n$$

para as **m** variáveis de controlo:

$$\frac{\delta I[\vec{x}(t),\vec{u}(t),t]}{\delta u_i(t)} + \sum_{j=1}^{n} m_j(t) \frac{\delta f_j[\vec{x}(t),\vec{u}(t),t]}{\delta u_i(t)} = 0$$

$$i=1,\ldots,m$$

Expressão que nos permite obter as <u>variáveis de controlo</u> como **função das variáveis de estado, dos multiplicadores e do tempo**, i.e.:

$$u_i(t) = y_i \quad [\vec{x}(t), \vec{m}(t), t]$$

introduzindo esta expressão nas equações de comportamento e no sistema obtido a partir das condições de Euler para as variáveis de estado obtemos um sistema de equações diferenciais em x e **m** que se pode resolver tomando em consideração as condições nos limites:

$$x_i(0) = a_i \quad \text{e}$$

$$\frac{\delta M}{\delta x'_i(t)} = - m_i(T) = 0 \qquad i=1,\ldots,n$$

(4) Miller, R.E. (1979), pag.34 e Helmer, J-Y. (1972), pag.27

(5) Albouy, M. (1972), pag.79 - exemplo de programa de investimentos de uma empresa que procura maximizar os seus lucros; Kamien, M. e Schwartz, N. (1983), pag.21 - plano de produção e acumulação de stocks que minimize os custos de produção e armazenamento; pag. 23 - mesmo problema considerando uma taxa de actualização; pag.24 - admitindo uma função de custos de produção convexa e monotonamente crescente com a taxa de produção; pag. 86 - com o custo de produção proporcional ao quadrado da taxa de produção e o custo de armazenagem como uma função linear; pag. 92 - plano de despesas de publicidade de uma empresa;

(6) Clark e De Pree (1979)

(7) Pitchford, J. e Turnovski, S. (1977), pag.42 - plano de consumo que maximiza a utilidade do consumidor individual;

pag.49 - modelo de poupanças individuais de Atkinson; Kamien e Schwartz (1983), pag. 25 - problema para determinar a taxa de consumo que maximiza a utilidade num intervalo conhecido; pag.57- mesmo problema mas com tempo de vida incerto;

(8) Kamien e Shwartz. ob.cit. pag, 50

(9) idem, pag.63

(10) idem, pag.75

(11) Helmer (1972), cap. 3; Kamien e Schartz (1983), pag.98 - modelo de crescimento neo-clássico; pag.68- projecto de desenvolvimento com a particularidade de os gastos mais rápidos serem os que menos contribuem para o objectivo; Pitchford e Turnovski, (1977), pag. 13 - problema de determinação da taxa de poupança de um país; Amaral, J.F. (1979) - desenvolvimento do modelo de crescimento económico simples apresentado pelo autor em 1977.

3. PRINCIPIO DE PONTRYAGIN

Outro método para a resolução de problemas de controlo óptimo foi apresentado pela equipe chefiada pelo matemático Pontryagin (1956) e posteriormente discutido e desenvolvido por autores como Liang-Tsen Fan, Chiu-Sen Wang, Lee, Marcus, Albouy, Armand, Intriligator e muitos outros.

Definindo-se como uma generalização dinâmica do método dos multiplicadores de Lagrange o **Princípio do Máximo** ou de **Pontryagin** permite-nos ultrapassar algumas das hipóteses mais restritivas do Cálculo de Variações, nomeadamente a exigência de continuidade das variáveis de controlo, e revela-se um instrumento adequado para aplicação aos problemas económicos pelas interpretações que possibilita dos conceitos de variáveis duais utilizadas na programação matemática.

3.1.FORMULAÇAO GERAL DO PRINCÍPIO

Para resolver um problema geral de controlo óptimo o Princípio de Pontryagin baseia-se na decomposição do óptimo dinâmico numa sucessão de óptimos instantâneos através da associação a cada variável do vector de estado de uma nova função derivável, $\vec{y}(t)$, que nos permite definir a cada instante do tempo uma função hamiltoniana:

$$H[\vec{x}(t), \vec{u}(t), \vec{y}(t), t] = I[\vec{x}(t), \vec{u}(t), t] + \sum_{j=1}^{n} \vec{y}(t)\, f_j[\vec{x}(t),\vec{u}(t),t]$$

onde as variáveis duais, $\vec{y}(t)$, são soluções do sistema de equações diferenciais:

$$y'_i(t) = - \frac{\delta H [\vec{x}(t), \vec{u}(t), \vec{y}(t), t]}{\delta x_i} \qquad i = 1,\ldots,n$$

e verificam as condições nos limites (condições de transversalidade):

$$y_i \ (T) = 0 \qquad i = 1,\ldots,n$$

Tendo presente que

$$\frac{\delta \ \{I[\vec{x}(t),\vec{u}(t),t] + \sum_{j=1}^{n} y_j \ (t) \ f_j \ [\vec{x}(t),\vec{u}(t),t]}{\delta \ y_i} =$$

$$= \ f_i \ [\vec{x}(t),\vec{u}(t),t] = x'_i(t)$$

Pontryagin demonstra que uma <u>condição</u> <u>necessária</u> para que um vector de controlo, $\vec{u}(t)$, admissível no intervalo [O,T], se defina como óptimo, i.e. maximize ou minimize o funcional:

$$J = \int_{0}^{T} I \ [\vec{x}(t), \vec{u}(t), t] \ dt$$

é a existência de n funções y_i (t), com i = 1,...,n que sejam soluções do sistema de equações diferenciais apresentado, satisfaçam as respectivas condições nos limites e possibilitem que o hamiltoniano definido atinja em cada instante t o seu máximo (mínimo) no domínio admissível do vector de controlo óptimo $\vec{u}(t) = \bar{\vec{u}}(t)$.

A utilização deste princípio como método de resolução de um problema geral de controlo óptimo faz-se normalmente em dois passos:

Primeiro - maximização do hamiltoniano em relação às variáveis de controlo, i.e. se admitirmos a não existência de restrições sobre os controlos teremos:

$$\frac{\delta H [\vec{x}(t), \vec{u}(t), \vec{y}(t), t]}{\delta u_i} = 0 \qquad i = 1,\ldots,m$$

se os controlos tiverem que satisfazer determinadas restrições o primeiro passo será procurar o vector de controlos, $u_i(t)$, que maximiza o problema:

$$\text{Max } \{ I [\vec{x}(t), \vec{u}(t), t] + \sum_{j=1}^{n} y_j(t) \quad f_j [\vec{x}(t), \vec{u}(t), t]\}$$

s.a:

$$h_j [u_i(t), t] \leq 0 \quad \text{com } j = 1,\ldots, q$$
$$i = 1,\ldots, m$$

O resultado deste primeiro passo será a lei do controlo óptimo :

$$u_i (t) = \alpha_i [\vec{x}(t), \vec{y}(t), t] \qquad i = 1,\ldots,m$$

Segundo - integração das equações diferenciais, introduzindo-se a lei de controlo óptimo definida no sistema de equações :

$$x'_i(t) = \frac{\delta H \{\vec{x}(t), \alpha[\vec{x}(t),\vec{y}(t),t], \vec{y}(t),t\}}{\delta y_i(t)}$$

$$i = 1,\ldots,n$$

$$y'_i(t) = - \frac{\delta H \{\vec{x}(t), \alpha[\vec{x}(t), \vec{u}(t), t], \vec{y}(t), t\}}{\delta x_i(t)}$$

de que resulta um sistema diferencial de primeira ordem em $\vec{x}(t)$ e $\vec{y}(t)$. Atendendo às condições de transversalidade:

$$\begin{aligned} x_i(0) &= a_i \\ y_i(T) &= 0 \end{aligned} \qquad i = 1,\ldots,n$$

o sistema anterior permite-nos determinar o vector de estado $x_i(t)$ e o vector de variáveis duais $y_i(t)$ que definem o vector de controlos óptimos:

$$u_i(t) = \alpha[\vec{x}(t), \vec{u}(t), t] \qquad i=1,\ldots,m$$

Esta formulação corresponde ao pressuposto de o estado final do sistema, $\vec{x}(T)$, ser considerado livre e as variáveis duais que lhe estão associadas, $\vec{y}(T)$, conhecidas, o que ilustra a especificidade da definição das condições de transversalidade pelo princípio de Pontryagin, i.e. pelo facto de umas variáveis se definirem no espaço do problema primal e outras do seu dual é impossível impor-lhes valores no mesmo momento do tempo. Assim, conhecido o estado inicial do problema e deixando-se livre o seu estado final, as variáveis duais serão consideradas livres no momento inicial e pré-determinadas no fim do intervalo.

Outras formulações são possíveis para as condições nos limites. Analisaremos o caso em que o estado final do sistema é imposto e outro em que se conhece a situação inicial e se define o estado que se pretende atingir desconhecendo-se o intervalo de tempo necessário para o conseguir.

3.1.1. Estado final pré-determinado

Quando se impõe um valor ao estado final do sistema:

$$x_i\ (T) = b_i$$

temos que considerar o vector das variáveis duais que lhe estão associadas, y_i (T) como livre.

Na resolução do sistema de equações diferenciais que nos permite obter os valores de $x(t)$ e $y(t)$ teremos como condições de transversalidade:

$$x_i\ (0) = a_i \qquad i = 1,\ldots,n$$
$$x_i\ (T) = b_i$$

Podemos ainda admitir que só alguns valores das variáveis incluidas no vector que define o estado final do sistema sejam pré-determinados o que implicará que só as respectivas variáveis duais sejam livres no momento T.

Numa situação em que os valores iniciais de todas ou algumas das variáveis do vector de estado sejam considerados livres as variáveis duais que lhes estão associadas serão necessariamente nulas (não podendo ser incluidas na função objectivo) e teremos como condições nos limites:

$$y_i\ (0) = 0$$
$$x_i\ (T) = b_i$$

3.1.2. Tempo de duração livre

Considerando a duração do intervalo de tempo como incógnita do problema ela pode ser determinada pela condição que impõe que no período óptimo o valor máximo do hamiltoniano terá que ser nulo, i.e.:

$$\mathrm{Max}\ \{ H [\vec{x}(T), \vec{u}(T), \vec{y}(T), T] \} = 0$$

Muitas vezes além de se desconhecer a duração do intervalo pretende-se que ele seja o mínimo possível. Para tal considera-se uma nova variável de estado:

$$x_{n+1}(t) = t$$

que se define pelo sistema:

$$x_{n+1}(0) = 0$$
$$x'_{n+1}(t) = 1$$

Definindo a função objectivo do problema

$$\mathrm{Min}\ J = x_{n+1}(T) = T$$

o hamiltoniano será:

$$H = y_{n+1}(t) + \sum_{j=1}^{n} y_j(t)\ f_j[\vec{x}(t), \vec{u}(t), t]$$

Considerando que a variável dual, $y_{n+1}(t)$, associada à variável de estado x_{n+1} é igual à unidade ao longo de todo o intervalo teremos:

$$y'_{n+1}(t) = -\frac{\delta H}{\delta x_{n+1}} = 0$$

$$y_{n+1}(T) = 1$$

e como condição que garante que o intervalo seja mínimo:

$$\min \{ 1 + \sum_{j=1}^{n} y_j(T) \, f_j \, [\vec{x}(T), \vec{u}(T), T] \}$$

3.1.3. Outras restrições

Além das restrições sobre os estados inicial e final do sistema e das que se podem impor ao vector de controlo (referidas quando apresentámos o método geral de resolução) há outras condições a que o Princípio de Pontryagin se consegue adaptar.

Quando se formulam restrições sobre os vectores de estado e de controlo sob a forma de igualdades, elas podem ser introduzidas no problema geral associando a cada uma um novo multiplicador de Lagrange generalizado e adaptando a definição do hamiltoniano. Procedimento análogo se pode seguir no caso de as restrições aparecerem sobre a forma de desigualdades, generalizando neste caso a aplicação de multiplicadores de Kuhn-Tucker.

Se as restrições forem expressas por um integral do tipo

$$\int_0^T z \, [\vec{x}(t), \vec{u}(t), t] \, dt = K \qquad \text{com } K = \text{constante}$$

podem ser introduzidas associando-lhes um multiplicador de Lagrange generalizado e adaptando a função objectivo ou, em alternativa, pela consideração de uma nova variável de estado, $x_{n+1}(t)$ que se define pelo sistema:

$$x'_{n+1}(t) = z[\vec{x}(t), \vec{u}(t), t]$$

$$x_{n+1}(0) = 0$$

impondo-se para seu valor final $x_{n+1}(T) = K$ que nos garante que a restrição será satisfeita.

3.1.4. Tempo discreto

Em muitas situações, nomeadamente problemas da esfera económica, o intervalo de tempo não pode ser considerado contínuo mas apenas com valores discretos: $t = 0, 1, \ldots, T$

Com tempo discreto o Princípio de Pontryagin determina que uma condição necessária para que o vector de controlos admissíveis

$u_i(t)$ com $i=1,\ldots,m$ e $t = 0, 1, \ldots, T-1$

maximize (ou minimize) o funcional:

$$J = \sum_{i=1}^{n} c_i\, x_i\,(T)$$

é que existam $y_i(t)$ para $i=1,\ldots,n$ e $t = 0, 1, \ldots, T-1$

que satisfaçam:

$$y_i(t) - y_i(t-1) = \frac{\delta\, H\,(\vec{x},\vec{u},\vec{y},t)}{\delta\, x_i(t)}$$

$$y_i(T-1) = c_i$$

e tais que a função hamiltoniano assim definida:

$$H\,(\vec{x},\vec{u},\vec{y},t) = \sum_{j=1}^{n} y_j(t)\, f_j[\vec{x}(t), \vec{u}(t), t]$$

atinja em cada momento t o seu máximo (ou mínimo) no conjunto de controlos admissíveis

3.2. CONDIÇÕES SUFICIENTES

O Principio de Pontryagin define-se como uma <u>condição necessária</u> para a resolução dos problemas de controlo óptimo, como tal se com ele obtivermos um conjunto de soluções poderemos concluir que não existem outras possíveis mas, não saberemos ainda se alguma das soluções se pode considerar óptima nem sequer se existirá uma solução óptima.

Para encontrarmos uma solução óptima precisamos de definir <u>condições suficientes</u>. Há duas situações em que as condições necessárias de Pontryagin se revelam também suficientes: quando o hamiltoniano é côncavo em relação ao vector de estado (teoremas de suficiência apresentados por Mangasarian e Arrow) (1) e quando o hamiltoniano é linear em relação ao vector de controlo (demonstrado por Rozonoer e aplicado em muitos problemas concretos) (2).

Para **Mangasarian** se $\vec{x}^*(t)$ for um vector de estado admissível e $\vec{u}^*(t)$ um vector de controlo admissível num problema de controlo óptimo com o intervalo [O,T] conhecido e a seguinte formulação:

$$\text{Max} \int_0^T f_0\,[x_1(t),\ldots,x_n;\ u_1,\ldots,u_m;\ t]\,dt$$

sujeito às equações diferenciais:

$$\frac{d\, x_1(t)}{dt} = f_1[x_1(t),\ldots,x_n(t);\ u_1(t),\ldots,u_m(t);\ t]$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d\, x_n(t)}{dt} = f_n[x_1(t),\ldots,x_n;\ u_1(t),\ldots,u_m(t);\ t]$$

com as condições iniciais:

$x_i(0) = a_i$ com $i=1,\ldots,n$ e
$a = (a_1,\ldots,a_n)$ um ponto fixo em R^n

condições finais:

$x_i(T) = b_i$ $i=1,\ldots,d$ (b_i fixo)

$x_i(T) \geq b_i$ $i=d+1,\ldots,l$ (b_i fixo)

$x_i(T)$ livre $i=l+1,\ldots,n$

e a restrição sobre a variável de controlo:

$$\vec{u}(t) = [u_1(t),\ldots,u_m(t)] \in U \leq R^m$$

Supondo que o conjunto U é convexo e que as derivadas parciais de f_i em ordem a u_j existem e são contínuas, se existir uma função diferenciável de intervalos contínuos:

$$\vec{y}(t) = [y_1(t),\ldots,y_n(t)]$$

tal que com $y(0) = 1$ sejam satisfeitas as seguintes condições:

$$y'_i(t) = -\frac{\delta H^*}{\delta x_i} \qquad i = 1,\ldots,n$$

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\delta H^*}{\delta u_j}[u_j^*(t) - u_j] \geq 0$$ para qualquer $u \in U$ e para qualquer t

$y_i(T)$ livre $i=1,\ldots,d$

$y_i(T) \geq 0$ ($=0$ se $x_i^*(T) > b_i$) $i=d+1,\ldots,l$

$y_i(T) = 0$ $i=l+1,\ldots,n$

e se

$H[\vec{x},\vec{u},\vec{y}(t),t]$ for côncavo em $(\vec{x},\vec{u})$ para qualquer t

$[\vec{x}^*(t),\vec{u}^*(t)]$ será uma solução do problema apresentado.

Se $H[\vec{x},\vec{u},\vec{y}(t),t]$ for estritamente côncavo em $(\vec{x},\vec{u})$

$[\vec{x}^*(t),\vec{u}^*(t)]$ será a única solução do que maximiza o problema.

Tendo presente que se as funções $f_0(\vec{x},\vec{u},t)$ e $f_1(\vec{x},\vec{u},t);\ldots;f_n(\vec{x},\vec{u},t)$ forem todas côncavas em $(\vec{x},\vec{u})$ com $y_i \geq 0$, para $i=1,\ldots,n$, o hamiltoniano também será côncavo em $(\vec{x},\vec{u})$ e que se $x_0(\vec{x},\vec{u},t)$ for côncava e $f_1(\vec{x},\vec{u},t);\ldots;f_n(\vec{x},\vec{u},t)$ forem todas lineares em $(\vec{x},\vec{u})$, o hamiltoniano será sempre côncavo em $(\vec{x},\vec{u})$, Arrow propõe uma condição suficiente com hipóteses menos restritivas do que a de Magasarian.

Arrow define um hamiltoniano:

$$\hat{H}[\vec{x},\vec{y}(t),t] = \max_{u \in \Omega} H[\vec{x},\vec{u},\vec{y}(t),t]$$

assume que existe um valor máximo do hamiltoniano e apresenta como condição suficiente de $[\vec{x}^*(t),\vec{u}^*]$ ser uma solução do problema acima formulado que:

$\hat{H}[\vec{x},\vec{y}(t),t]$ seja côncava em $\vec{x}$ para qualquer t.

Se $\hat{H}[\vec{x},\vec{y}(t),t]$ for estritamente côncava em $\vec{x}$ para qualquer t, $\vec{x}^*(t)$ será certamente uma solução óptima única mas $\vec{u}^*(t)$ poderá não o ser.

A situação de linearidade do hamiltoniano em relação ao vector de controlo pode ser ilustrada com um problema no intervalo $[0,T]$ conhecido e estados inicial, $\vec{x}(0)$, e final, $\vec{x}(T)$, livres.

O objectivo será:

$$\text{Max } J = \int_0^T [\, I\,(\vec{x},t) + L\,(\vec{x},\vec{x}',t)\,]\, dt$$

s.a: $$\frac{d\,x_i}{dt} = x'_i = u_i$$

$$A_i\,(\vec{x},t) \leq u_i \leq B_i\,(\vec{x},t)$$

O hamiltoniano será: $H = I + (L + y)\,u$

que nos permitirá definir para cada variável incluida nos vectores de controlo, $u_i\,(t)$, uma <u>função de comutação</u>:

$$\tau_i\,(t) = L\,(\vec{x},t) + y_i\,(t)$$

Atendendo aos limites definidos para os controlos os valores assumidos por estas funções de comutação determinam o controlo $u_i\,(t)$ que em cada momento t maximizam o hamiltoniano, i.e.:

se $\tau_i\,(t) < 0$ temos $u_i\,(t) = A_i$

se $\tau_i\,(t) > 0$ $u_i\,(t) = B_i$

controlos que se designam do tipo <u>"bang-bang"</u>, que se usam em alternativa e correspondem aos dois extremos definidos.

Se $\tau_i\,(t) = 0$ os controlos u_i não afectam o valor do hamiltoniano. Esta situação pode ser pontual ou manter-se durante um certo período do intervalo, dando neste caso origem a <u>soluções singulares</u> que terão que ser obtidas pela manipulação das outras condições do problema.

No exemplo presente se $\tau = 0$ temos

$L = - y_i$ e $H = I$.

Mas, uma vez que
$$\frac{\delta H}{\delta x_i} = - y'_i$$
assim como
$$\frac{\delta L}{\delta t} = - y'_i$$
podemos concluir que:
$$\frac{\delta L}{\delta t} = \frac{\delta I}{\delta x_i}$$
expressão que nos garante que $x_i(t) = x_i^*$ são soluções singulares.

Sendo $\vec{u}^*(t) = \vec{x}'^*(t)$ a <u>solução óptima</u> define-se como uma combinação de controlos de tipo "bang-bang" e de controlos singulares.

3.3. INTERPRETAÇÃO ECONOMICA

O Princípio de Pontryagin, pelas semelhanças que apresenta com a programação matemática, é um dos métodos de resolução de problemas de controlo óptimo que mais se aplica a problemas da esfera económica, pois permite a interpretação em termos económicos das variáveis de estado e de controlo, das expressões que definem os objectivos e as possíveis restrições, das condições de transversalidade e das soluções obtidas.

Inúmeros são os exemplos divulgados em áreas que abrangem desde a determinação de limites de preços (3), preços em monopólio (4), maximização de lucro e teoria do capital (5), utilização de equipamento (6), regulação óptima da produção pelos stocks (7), opções consumo/investimento, estudos sobre a poluição (8), regionalização (9), utilização de recursos naturais (10), questões financeiras (11), política económica (12), problemas de decisão e informação imperfeita (13), etc.,etc.

Autores há que dedicam especial atenção ao desenvolvimento das possibilidades de interpretação que este método apresenta (14) e Albouy (15) formula mesmo um <u>teorema da interpretação económica</u> nos seguintes termos:

Consideremos um momento $t \in [0,T]$ e suponhamos que o sistema apresenta o estado $\vec{x}(t)$ nesse momento. Se a partir desse estado gerirmos o sistema de uma forma óptima, o valor da função de avaliação global entre t e T depende apenas das condições definidas no momento t. Seja $J^*[\vec{x}(t),t]$ esse valor.

Se $J^*[\vec{x}(t),t]$ for diferenciável duas vezes na vizinhança de $\vec{x}^*(t)$ e se, a partir de qualquer estado inicial $\vec{x}(t)$ na vizinhança de $\vec{x}^*(t)$, o sistema se mantiver controlável, demonstra-se (16) que, qualquer que seja $t \in [0,T]$

$$y^*_i(t) = \frac{\delta J^*[\vec{x}^*(t),t]}{\delta x_i(t)} \qquad i=1,\dots,n$$

se o problema for de maximização, e

$$y^*_i(t) = \frac{\delta J^*[\vec{x}^*(t),t]}{\delta x_i(t)} \qquad i=1,\dots,n$$

se o problema for de minimização.

Tendo presente este resultado $y^*_i(t)$ pode ser interpretado como a variação da função de avaliação global entre t e T devida a uma modificação marginal do estado x_i quando pretendemos gerir o sistema de forma óptima a partir dessa data.

O sinal positivo ou negativo que a expressão apresenta tem também justificação em termos económicos.

Assim, num problema de máximo J será um ganho, benefício ou utilidade para o órgão controlador e a função dual $y^*_i = + \delta J^* / \delta x_i$ indicará o acréscimo de utilidade que se obterá em todos os períodos futuros pelo facto de terem variado os recursos x_i no momento t supondo que se utilizam esses recursos de forma óptima.

Na situação inversa, em que o objectivo é a minimização de custos temos $y_i^* = - \delta J^* / \delta x_i$ que mede a redução de despesas que pode resultar nos períodos futuros da variação do estado x_i de determinados stocks no momento t, supondo que daí em diante se segue uma trajectória óptima.

y_i^* apresenta-se como um preço "sombra", com as características das variáveis duais da programação matemática, e representa o preço da utilização do stock de recursos x_i no momento t, i.e. o preço máximo que o controlador do sistema está disposto a pagar no momemto t para dispor de uma unidade adicional do recurso x_i.

Na resolução de problemas de controlo óptimo com este método também há que ter presente a interdependência temporal das decisões sobre os controlos e garantir que as consequências provocadas a curto prazo igualam os efeitos futuros devidos à alteração do estado do sistema.

Tomemos como exemplo uma situação em que se procura maximizar os benefícios da utilização de um stock de recursos, $\vec{x}(t)$, no intervalo [0,T] tomam-se decisões, $\vec{u}(t)$ sobre a sua utilização que alteram o estado desse stock.

$b[\vec{x}(t),\vec{u}(t),t]$ será a taxa de benefício líquido por unidade de tempo, i.e. a taxa de ganho líquido obtido na data **t** como resultado de se possuir $\vec{x}(t)$ e de se terem tomado as decisões $\vec{u}(t)$.

O problema poderá ser formalizado como:

Determinar no intervalo [0,T] as sequências de decisões $\vec{u}(t)$ que maximizem o funcional:

$$J = \int_0^T B\,[\vec{x}(t),\vec{u}(t),t]\;dt$$

Tal como fizemos para o cálculo de variações podemos supor a existência de uma trajectória óptima para o vector de controlo, $\vec{u}^*(t)$, seguindo essa trajectória o benefício máximo em dado momento, $0 \leq t \leq T$, dependerá apenas do estado dos recursos nesse momento, $\vec{x}(t)$ e poderá ser definida pela função:

$$M^*[\vec{x}(t),t] = \underset{\vec{u}(\tau)}{\mathrm{Max}}\,\{\int_t^T B\,[\vec{x}(\tau),\,\vec{u}(\tau),\,\tau]\,d\tau\,\}$$

com $t \leq \tau \leq T$

Admitindo ainda a divisão do intervalo [t,T] em dois sub-intervalos, [t, t+dt] **e** [t+dt, T] e aplicando o desenvolvimento limitado em série de Taylor reencontramos a equação de Hamilton-Jacobi:

$$\text{Max}\ \{ B[\vec{x}(t),\vec{u}(t),t] \} = - \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta M^*[\vec{x}(t),t]}{\delta x_i(t)} x'_i - \frac{\delta M^*[\vec{x}(t),t]}{\delta t}$$

confirmando que ao longo da trajectória óptima manteremos a igualdade entre:

1) $B[\vec{x}(t),\vec{u}(t),t]$ i.e. a contribuição a curto prazo para o máximo de benefícios da utilização do sistema pelos efeitos imediatos sobre o sistema e

2) os efeitos futuros, i.e. a diminuição do valor potencial do sistema devida por um lado à alteração do seu estado (queda do stock de recursos) provocada pela decisão de controlo adoptada (utilização desses recursos)

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\delta M^*}{\delta x_i} x'_i$$

e por outro aos efeitos do tempo, $\delta M^*/\delta t$.

A expressão $\delta M^* / \delta x_i$ que nos indica a alteração do benefício máximo provocada pela variação marginal do estado do sistema, i.e., **o preço marginal atribuido à utilização do stock de recursos** x_i corresponde exactamente à definição da **variável dual,** y_i apresentada pelo **Teorema da interpretação económica** de Albouy (17).

Na resolução do problema pelo Princípio de Pontryagin este sistema de preços, $y_i(t)$ é considerado como um parâmetro conhecido e, no momento **t** procuramos o controlo óptimo, $\vec{u}^*(t)$, pertencente a um conjunto U de controlos admissíveis que maximize o hamiltoniano, i.e.

$$H^*[\vec{x}^*(t),\vec{u}^*(t),\vec{y}^*(t),t] = \max_{\vec{u}\in U} H[\vec{x}^*(t),\vec{u}(t),\vec{y}^*(t),t]$$

Tendo presente que $\vec{u}^*(t) = \vec{x}'^*(t)$, ou seja, a escolha no momento t da melhor utilização dos recursos equivale à determinação da mudança do seu stock, se adimitirmos a existência de uma trajectória óptima para o estado do sistema, a partir de um ponto dessa trajectória o problema será:

Determinar no momento t a alteração do estado do sistema $\vec{x}'(t)$ que verifique:

$$H[\vec{y}^*(t),\vec{x}'(t)] \leq H^*[\vec{y}^*(t),\vec{x}'^*(t)]$$

ou, introduzindo o efeito exógeno do tempo sobre o estado do sistema:

$$H[\vec{y}^*(t),\vec{x}'(t)] + \frac{\delta J^*[\vec{x}^*(t),t]}{\delta t} \leq H^*[\vec{y}^*(t),\vec{x}'^*(t)] + \frac{\delta J^*[\vec{x}^*(t),t]}{\delta t}$$

Ao problema anterior, que podemos designar como primal está associado um outro que pode ser formulado como o seu dual.

Supondo a existência de uma trajectória óptima para as variáveis de controlo, $\vec{u}^*(t)$, a partir de um ponto dessa trajectória determinar o melhor sistema de valorização a atribuir à diminuição dos recursos, $\vec{y}^*(t)$, que verifique:

$$H[\vec{y}(t),\vec{x}'^*(t)] \geq H^*[\vec{y}^*(t),\vec{x}'^*(t)]$$

Nesta dualidade reencontramos o carácter intertemporal das decisões sobre os controlos. A utilização dos recursos em determinado momento trará benefícios imediatos mas, impedirá a sua utilização no futuro e, vice-versa, a manutenção do stock será um prejuízo a curto prazo que aumentará os benefícios futuros.

Se ignorarmos esta dualidade e utilizarmos os recursos disponíveis indiscriminadamente estaremos a dar preferência ao momento presente e a prejudicar o futuro. Se, inversamente, utilizarmos um sistema de valorização demasiado elevado, orientaremos as preferências para o futuro negligenciando o presente. O ideal seria conseguir-se:

$$\max_u [\min_y (H)] = \min_y [\max_u (H)] = 0$$

3.5. O PRINCÍPIO DE PONTRYAGIN E O CÁLCULO DE VARIAÇÕES

O Cálculo de Variações pode ser apresentado como um caso particular do Princípio do Máximo.

A partir de um problema de controlo óptimo

$$\text{Max} \quad J = \int_0^T I\,[\vec{x}(t), \vec{u}(t), t]\,dt$$

com $\quad \vec{x}(0) = \vec{a}$

$\qquad\quad \vec{x}(T) = \vec{b}$

formamos o hamiltoniano

$$H = I\,[\vec{x}(t),\vec{u}(t),t] + \sum_{i=1}^{n} y_i(t)\, u_i$$

sendo

$$y'_i(t) = \frac{\delta I[\vec{x}(t),\vec{u}(t),t]}{\delta x_i(t)}$$

maximizamos o Hamiltoniano em ordem a u(t)

$$\frac{\delta H}{\delta \vec{u}} = \frac{\delta I}{\delta \vec{u}} + y_i(t) = 0$$

pela definição de $y'_i(t)$ podemos escrever

$$\frac{\delta\, I[\vec{x}(t),\vec{u}(t),t]}{\delta x_i(t)} = \frac{d}{dt}\left[\frac{\delta\, I[\vec{x}(t),\vec{u}(t),t]}{\delta u_i(t)}\right] = 0$$

que com $\vec{u}(t) = \vec{x}'(t)$ será a <u>Equação de Euler</u> do Cálculo de Variações

$$\frac{\delta\, I[\vec{x}(t),\vec{x}'(t),t]}{\delta \vec{x}'(t)} = \frac{d}{dt}\left[\frac{\delta\, I[\vec{x}(t),\vec{x}'(t),t]}{\delta \vec{x}'(t)}\right] = 0$$

Uma vez que queremos que o hamiltoniano seja máximo temos

$$\frac{\delta^2\, H[\vec{x}(t),\vec{u}(t),\vec{y}(t),t]}{\delta \vec{u}^2(t)} \leq 0$$

equivalente à <u>condição de Legendre</u>, necessária para obtermos um máximo pelo Cálculo de Variações

$$\frac{\delta^2 I[\vec{x}(t),\vec{u}(t),t]}{\delta \vec{u}^2(t)} = \frac{\delta^2 I[\vec{x}(t),\vec{x}'(t),t]}{\delta \vec{x}'^2(t)} \leq 0$$

A condição de Weierstass que nos assegura tratar-se de um máximo absoluto e não relativo será obtida tendo presente que a solução de máximo pelo hamiltoniano, $\vec{u}^*(t)$ terá que satisfazer

$$H^*[\vec{x}^*(t),\vec{u}^*,\vec{y}^*,t] \geq H[\vec{x}^*(t),\vec{u}(t),\vec{y}^*,t]$$

sendo $\vec{y}^*(t) = \dfrac{\delta I[\vec{x}^*(t),\vec{x}'^*(t),t]}{\delta \vec{x}'(t)}$

e substituindo no hamiltoniano temos

$$I[\vec{x}^*(t),\vec{x}'(t),t] - \vec{x}'^*(t)\frac{\delta I[\vec{x}^*(t),\vec{x}'^*(t),t]}{\delta \vec{x}'(t)} \geq$$

$$\geq I[\vec{x}^*(t),\vec{x}'(t),t] - \vec{x}'(t)\frac{\delta I^*[\vec{x}^*(t),\vec{x}'^*(t),t]}{\delta \vec{x}'(t)}$$

que se identifica com a condição de Weierstrass

$$I[\vec{x}^*(t),\vec{x}'(t),t] - I^*[\vec{x}^*(t),\vec{x}'^*(t),t] -$$

$$- [\vec{x}'(t)-\vec{x}'^*(t)] \frac{\delta I^*[\vec{x}^*(t),\vec{x}'^*(t),t]}{\delta \vec{x}'(t)} \leq 0$$

O Cálculo de Variações e o Princípio de Pontryagin são pois métodos de resolução de problemas de controlo óptimo que se podem considerar equivalentes mas, as hipóteses utilizadas no segundo são menos restritivas, já que não se exige que as funções de controlos admissíveis sejam necessariamente contínuas por intervalos, o que estende as possibilidades de aplicação do Princípio do Máximo sobretudo a problemas da esfera económica onde a continuidade das funções é muitas vezes difícil de admitir.

No entanto muitas dificuldades se levantam quando procuramos a resolução de problemas concretos pelo Princípio de Pontryagin. Os cálculos numéricos a que conduzem são complexos e nem sempre as soluções são únicas e admissíveis. Por outro lado, a existência de controlos óptimos não está sempre assegurada e podemos ter situações em que sejamos obrigados a alargar o conjunto de controlos admissíveis ou mesmo a reformular os modelos representativos dos problemas a resolver.

Outra dificuldade, apontada muitas veses como a mais limitativa, é o facto já referido, de o espaço de determinação dos controlos óptimos ser de um problema primal, enquanto o sistema de valorização aparece como solução do correspondente problema dual. æ partida não podemos estar seguros do equilíbrio das duas soluções. Conhecemos apenas os dados disponíveis no momento de partida, e formulamos hipóteses para as restantes condições que respeitem a dualidade do problema, procurando depois por um processo iterativo, que por vezes se revela complexo, a convergência das soluções obtidas e das hipóteses formuladas.

(1) Seierstad e Sydsaeter (1987) pag.105-108

(2) Lopes, J.(1987), pag.14-16

(3) Kamien e Schwartz (1983), pág.20.

(4) Miller, R. (1979), pag.101

(5) Dorfman, R. (1969)

(6) Albouy, M. (1972), II vol. pag. 91; Helmer, J-Y (1972), pag.127; Schiavoni e outros (in Aoki e Marzollo ed. 1977, pag.245).

(7) Helmer, J-Y (1972), pag.117

(8) Seierstad e Sydsaeter (1987), pag.78 e pag. 92

(9) Miller, R. (1979), cap. 5

(10) Smith,V. (1968); Forster,B. (in Pitchford e Turnovski ed., 1977, pag.35); Long,N.(idem, pag.81); Vousden N. (idem, pag.57); Lopes, R. (1985), cap.4

(11)Helmer, J-Y (1972) cap.8; Antão,P. (1989)

(12)Turnovski (in Pitchford e Turnovski ed., 1977, pag.293); Aoki (1973); Chow (1972) e (1973); Holdbrook (1972)

(13)Aoki (in Aoki e Marzollo ed.,1979, pag. 57)

(14)Armand,R. (1968) apresenta uma explicação muito detalhada e vários exemplos de interpretação das variáveis de estado e de controlo,das equações de comportamento, da função objectivo, e depois do método de resolução e dos resultados que se obtêm; Dorfman, R.(1969) dedica também uma atenção especial às possibilidades de interpretação que o Princípio de Pontryagin oferece; Lopes,R.J.(1987) apresenta a interpretação económica do método em termos gerais, detendo-se na explicação da equação de Hamilton-Jacobi e nas possibilidades de interpretação das variáveis adjuntas.

(15)Albouy, M. (1972), II vol., pag.88

(16)Albouy na obra referida, pag.104-110 apresenta a demonstação detalhada deste teorema

(17) Helmer (1972), pag.105-109 apresenta a demonstração da correspondência entre o sistema de valorização incluido na equação de Hamilton-Jacobi e o sistema de preços "sombra" utilizado pelo Princípio de Pontryagin.

4. PROGRAMAÇÃO DINAMICA

A Programação Dinâmica é o terceiro método utilizado na resolução de problemas de controlo óptimo. Permite-nos transformar um problema inicial de n incógnitas em n problemas a uma incógnita e ultrapassar muitas das dificuldades que surgem quando procuramos a aplicação prática dos outros dois que se baseiam no cálculo diferencial e em hipóteses que se revelam muitas vezes restritivas e de difícil aceitação, nomeadamente em problemas da esfera económica.

As bases do princípio fundamental deste método são conhecidas desde o sec.XVII (1), mas é já nos anos 40 do nosso século que ele se começa a utilizar na optimização de problemas económicos por autores como Massé e Hermann. Posteriormente desenvolvido e formalizado por Richard Bellman, que o designou por **Programação Dinâmica** , o método mostra-se adequado à resolução de problemas que apresentam uma natureza sequencial (de controlo óptimo ou outros) sendo o seu princípio básico conhecido por **Princípio de Bellman** ou **Princípio da Optimalidade.**

4.1. PRINCIPIO DE BELLMAN

As bases da Programação Dinâmica assentam no Princípio que Bellman formula como:

"Uma política óptima é aquela que, sejam quais forem o estado inicial e a decisão inicial, as decisões seguintes devam constituir uma política óptima em relação às decisões anteriores" (2)

Para demonstrar este Princípio o autor formaliza um exemplo de maximização da função $f_N(x)$ que representa o rendimento óptimo da repartição da quantidade de recurso x entre **N** actividades

$$f_N(x) = \underset{\{x_i\}}{\text{Max}}\ R(x_1,\ldots,x_N) = g_1(x_1) + \ldots + g_N(x_N)$$

s.a. $x_i \geq 0$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = x$$

para o qual é evidente que $f_N(0) = 0$ com $N = 1,2,\ldots = x$
e se $g_i(0) = 0$ temos para $x \geq 0$

$$f_1(x) = g_1(x)$$

Seja qual for a quantidade de recurso x_N, pertencente ao intervalo $[0,x]$, atribuida à actividade **N**, sabemos que o resto dos recursos, i.e. $x-x_N$ será utilizada de forma a obtermos <u>o máximo rendimento das restantes actividades</u> representado por

$$f_{N-1}(x-x_N)$$

Assim, a decisão de atribuirmos x_N à actividade n dará origem ao rendimento total

$$g_N(x_N) + f_{N-1}(x-x_N)$$

que procuramos maximizar.

O problema será então a **escolha de x_N que verifique**

$$f_N(x) = \max_{0 \le x_N \le x} [g_N(x_N) + f_{N-1}(x-x_N)]$$

$$\text{para } N = 2,3,\ldots, x \ge 0$$

e

$$f_1(x) = g_1(x) \qquad \text{para } x \ge 0$$

A demonstração é feita por absurdo tendo presente que uma política óptima tem que ser necessariamente composta por políticas óptimas, uma vez que, se alguma delas o não fosse seria logo substituida por outra melhor, i.e. pela política óptima correspondente.

Na base deste princípio estão presentes duas hipóteses :

1) a aditividade dos objectivos que se exprime pelo tipo de função a optimizar

2) o carácter não hereditário do sistema, i.e. a possibilidade de toda a sua evolução passada ser resumida nos valores apresentados pelo vector de estado.

São hipóteses que não restringem a utilização do método da Programação Dinâmica na resolução dos problemas do controlo óptimo. A segunda já foi até apresentada como característica dos problemas gerais de controlo óptimo e a aditividade dos objectivos está presente nos problemas aqui formulados.

4.2. UTILIZAÇÃO DO PRINCÍPIO DE BELLMAN EM PROBLEMAS DE CONTROLO ÓPTIMO

4.2.1. Tempo Contínuo

Se considerarmos um problema de controlo óptimo em que se procura determinar um controlo $\vec{u}(t)$ pertencente ao conjunto de controlos admissíveis que conduza à maximização do funcional

$$J = \int_0^T I\,[\vec{x}(t),\vec{u}(t),t]\,dt$$

s.a. $\quad \vec{x}'(t) = g[\vec{x}(t),\vec{u}(t),t]$

podemos admitir mais uma vez a existência de uma trajectória óptima, $\vec{x}^*(t)$, para $t \in [0,T]$ e a partição deste intervalo em dois períodos: $[0,t]$ e $[t+dt,T]$.

O Princípio de Bellman assegura-nos que seja qual for o momento $\tau \in [t,T]$, e o estado do sistema nessa data, $\vec{x}(\tau)$ será sempre possível definir uma função que determine o máximo que a função objectivo pode atingir no intervalo $[t,T]$ e que continuamos a designar por

$$M^*[\vec{x}(t),t] = \underset{\vec{u}(\tau)}{\mathrm{Max}} \int_t^T I\,[\vec{x}(\tau),\vec{u}(\tau),\tau]\,d\tau$$

Pelo Princípio enunciado sabemos que a política óptima será a conjugação das decisões iniciais

$$I\,[\vec{x}(t),\vec{u}(t),t]$$

e das decisões para o segundo período, $[t+dt,T]$, que por definição serão óptimas

$$M^*[\vec{x}(t+dt),\ t+dt]$$

Em todo o intervalo $[t,T]$, com o estado inicial $x(t)$ a função que determina a política óptima a seguir será

$$M^*[\vec{x}(t),t] = \max_{\vec{u}(t)} \{ I[\vec{x}(t),\vec{u}(t),t]\,dt + M^*[\vec{x}(t+dt),t+dt]$$

Desenvolvendo em série de Taylor limitada a função $M^*[\vec{x}(t),t]$ que não depende das decisões sobre os controlos, $\vec{u}(t)$, desprezando os termos de segunda ordem e tendo presente que

$$\frac{d\,\vec{x}(t)}{dt} = g[\vec{x}(t),\vec{u}(t),t]$$

reencontramos a equação de <u>Hamilton -Jacobi</u> (3)

$$\max_{\vec{u}(t)} \{ I[\vec{x}(t),\vec{u}(t),t] + \frac{\delta M^*[\vec{x}(t),t]}{\delta\vec{x}}\, g[\vec{x}(t),\vec{u}(t),t] \} =$$

$$= - \frac{\delta M^*[\vec{x}(t),t]}{\delta t}$$

Como condição nos limites podemos neste caso considerar

$$M^*[\vec{x}(T),T] = 0$$

para qualquer valor de $\vec{x}(T)$.

Numa situação em que o estado final das variáveis $l = 1,\ldots,k$ seja pré-determinado pela condição

$$h_l[\vec{x}(T)] = 0$$

teremos como condição de transversalidade

$$\frac{\delta M^*[\vec{x}(T),T]}{\delta x_i} = \sum_{l=1}^{k} \alpha_l \frac{\delta h_l[\vec{x}(T)]}{\delta x_i(T)} \qquad \text{com } i=1,\ldots,n$$

Se considerarmos como incógnita a duração do intervalo teremos $\delta M^{*}/\delta t = 0$ e a data T pode ser obtida pela expressão

$$Max \{ I[\vec{x}(T),\vec{u}(T),T] + \frac{\delta M^{*}[\vec{x}(T),T]}{\delta \vec{x}} g[\vec{x}(T),\vec{u}(T),T] \} = 0$$

Esta equação será válida para qualquer momento **t** do intervalo se considerarmos o caso estacionário em que a função de optimização se reduz a $M^{*}(\vec{x})$.

4.2.2. <u>Tempo Discreto</u>

Quando em vez de se considerar o intervalo de tempo [0,T] de forma contínua se admitem observações discretas

$t = 0, 1, 2, \ldots, T$

podemos formular um problema de controlo óptimo que procure determinar a sequência de vectores de controlo admissíveis $\vec{u}(t)$ que maximizem o funcional

$$J = \sum_{t=0}^{T-1} I\,[\vec{x}(t),\vec{u}(t),t]$$

s.a:

$$\vec{x}(t+1) - \vec{x}(t) = g[\vec{x}(t),\vec{u}(t),t]$$

$$x(0) = a$$

Para aplicação do Princípio de Bellman a este problema podemos começar por definir as funções $M^{*}_{t,T}(\vec{x})$ que representarão o valor máximo do objectivo no período compreendido entre o momento t e o momento T

$$\sum_{k=t}^{T-1} I[\vec{x}(k),\vec{u}(k),k]$$

Analisando em primeiro lugar o último período do intervalo, teremos para o estado $\vec{x}(T-1)$

$$M^{*}_{T-1,T}(\vec{x}) = \text{Max}\ \{I[\vec{x}(T-1),\vec{u}(T-1),T-1]\}$$

no penúltimo período

$$M^{*}_{T-2,T}(\vec{x}) = \text{Max}\ \{I[\vec{x}(T-2),\vec{u}(T-2),T-2] + M^{*}_{T-1,T}[\vec{x}(T-1)]\}$$

Generalizando podemos escrever que a optimização do objectivo nos períodos T-t será, a partir do estado $\vec{x}(t)$

$$M^{*}_{t,T} = \text{Max}\ \{I[\vec{x}(t),\vec{u}(t),t] + M^{*}_{t+1,T}[\vec{x}+g(\vec{x},\vec{u},t)]\}$$

e será possível definir uma função $y_t(\vec{x})$ que determine o controlo óptimo $\vec{u}(t)$ a adoptar no momento t em função do estado $\vec{x}(t)$

$$\vec{u}(t) = y_t[\vec{x}(t)]$$

conhecida esta relação e ainda

$$\vec{u}(t+1) = \vec{x}(t) + g[\vec{x}(t),\vec{u}(t),t]$$

conseguimos determinar todas as decisões óptimas no intervalo entre t e T-1 que maximizem o objectivo a partir do estado inicial, $\vec{x}(0) = \vec{a}$.

Numa situação em que se imponha um valor para o estado final do sistema , por hipótese

$$\vec{x}(T) = b$$

a função

$$M^{*}_{T-1,T}(\vec{x}) = g[\vec{x}(T-1),\vec{u}(T-1),T-1)]$$

terá que ser definida de forma a satisfazer a igualdade

$$b = x + g[x(T),u(T),T]$$

Se o tempo de duração do intervalo não for determinado a priori num sistema estacionário, i.e. quando as funções I e g não dependem explicitamente do tempo teremos

$$M^*(x) = \text{Max } \{g[x,u] + M^*[x+f(x,u)]\}$$

que nos permitirá solucionar o problema introduzindo as condições de transversalidade.

Com duração livre e sistema não estacionário a solução terá que ser encontrada por tentativas comparando os diferentes valores admitidos para T e o que eles permitem obter a nível dos objectivos definidos.

Os sistemas estacionários assumem particular importância sobretudo quando procuramos resolver problemas de controlo óptimo aplicados à esfera económica.

Neste caso o problema poderá ser formulado com a seguinte função objectivo

$$J = \text{Max} \sum_{t=0}^{T-1} I\,[\vec{x}(t),\vec{u}(t)]$$

e a equação de estado

$$\vec{x}(t+1) - \vec{x}(t) = g[\vec{x}(t),\vec{u}(t)]$$

Poderemos estão definir no momento t=1 o máximo da funçaö objectivo como a função

$$M^*_1 = \text{Max } \{I[\vec{x}(t),\vec{u}(t)]\}$$

obtida pela decisão de controlo $\vec{u} = y_1(\vec{x})$

Se o processo durar dois períodos teremos

$$M^*_2(x) = \text{Max}\ \{I[\vec{x}(t),\vec{u}(t)] + \text{Max}\ [I[\vec{x}(1),\vec{u}(1)]]\}$$

e assim sucessivamente.

Para os t períodos

$$M^*_t(\vec{x}) = \text{Max}\ \{I[\vec{x},\vec{u}] + M^*_{t-1}[\vec{x}+f(\vec{x},\vec{u})]\}$$

equação que definirá não só as funções de optimização dos objectivos, M^* como as funções de reacção $\vec{y}_t(\vec{x})$.

O método de resolução será assim, mais uma vez utilizar as equações funcionais do tipo da acima formulada para determinar a sequência de funções de optimização e de reacção, variando t entre 1 e T.

Em seguida calcular o valor de $\vec{u}(0) = \vec{y}_T(a)$ em função do estado inicial $\vec{x}(0) = \vec{a}$, e poderemos determinar passo a passo a sequência de controlos óptimos $\{\vec{u}(0),\ldots,\vec{u}(T-1)\}$ utilizando a equação de estado

$$\vec{x}(t+1) = \vec{x}(t) + g[\vec{x}(t),\vec{u}(t)]$$

e a função de controlo óptimo

$$\vec{x}(t) = \vec{y}_{T-t}[\vec{x}(t)]$$

Atingindo assim o objectivo de se transformar o problema inicial de n incógnitas em n problemas a uma incógnita.

Outro caso particular com interesse são os problemas de sistemas estacionários em que a duração do processo se admite como infinita sendo a função objectivo do tipo

$$\sum_{k=t}^{\infty} I\ [\vec{x}(k),\vec{u}(k)]$$

cuja optimização depende do estado do sistema, $\vec{x}(k)$ e dos controlos que sobre ele são tomados, independentemente do momento k considerado.

Nesta situação, a equação funcional será

$$M^* = \underset{\vec{u}}{Max} \; (\underset{\vec{u}}{Min}) \; \{I[\vec{x}(k),\vec{u}(k)] + M^*[\vec{x}(k),+g[\vec{x}(k),\vec{u}(k)]]\}$$

que se pode considerar como o limite, quanto k tende para infinito, da expressão

$$M^*_t = \underset{\vec{u}}{Max} \; (\underset{\vec{u}}{Min}) \{I[\vec{x}(k),\vec{u}(k) + M^*_{k+1}[\vec{x} + g[\vec{x}(k),\vec{u}(k)]]\}$$

A convergência desta última função para M^* verifica-se em duas situações que frequentemente se colocam em problemas da esfera económica:

1) Quando o estado do sistema está sujeito a restrições do tipo

$$ax(k-1) \leq x(k) \leq bx(k-1) \qquad \text{com a e b} \leq 1$$

que na prática reduzem o universo das decisões possíveis ao longo do tempo e

2) Quando o objectivo assume a expressão de uma soma actualizada

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{I[x(k),u(k)]}{(1+r)^k}$$

4.3. A PROGRAMAÇÃO DINÂMICA E O CÁLCULO DE VARIAÇÕES

A identificação dos resultados obtidos por estes dois métodos é possível se adimitirmos como controlo a variação do vector de estado, $\vec{x}'(t)$ formalizando um problema geral do cálculo de variações

$$\text{Max} \int_0^T I[\vec{x}(t),\vec{x}'(t),t]\, dt$$

A aplicação do Princípio de Bellman assegura-nos a existência da trajectória óptima M^* a partir de qualquer ponto $t\in[0,T]$ que verifique a condição necessária à maximização do problema em todo o intervalo

$$\max_{\vec{x}'(t)} \{I[\vec{x}(t),\vec{x}'(t),t] + \vec{x}'(t)\frac{\delta M^*[\vec{x}(t),t]}{\delta\vec{x}(t)} + \frac{\delta M^*[\vec{x}(t),t]}{\delta t}\} = 0$$

e

$$\delta I/\delta\vec{x}'(t) + \delta M^*/\delta\vec{x}(t) = 0$$

admitindo a variação de **t** a partir desta última expressão obtemos

$$\frac{d}{dt}\,\delta I/\delta\vec{x}'(t) + \frac{\delta^2 M^*}{\delta\vec{x}\,\delta t} + x'\frac{\delta^2 M^*}{\delta\vec{x}^2} = 0$$

Alterando o estado $\vec{x}(t)$ presente na equação anterior que determina a maximização de todo o intervalo temos

$$\frac{\delta I}{\delta \vec{x}} + \frac{\delta I}{\delta \vec{x}'}\frac{\delta \vec{x}'}{\delta \vec{x}} + \frac{\delta^2 M^*}{\delta \vec{x}\,\delta t} + x'\frac{\delta^2 M^*}{\delta \vec{x}^2} + \frac{\delta M^*}{\delta \vec{x}}\frac{\delta \vec{x}'}{\delta \vec{x}} = 0$$

Pela combinação destas expressões e desprezando os termos de segunda ordem reencontramos a <u>equação de Euler</u>:

$$\frac{d}{dt}[\delta I/\delta \vec{x}'(t)] - \delta I/\delta \vec{x}(t) = 0$$

A condição de segunda ordem de Legendre terá que garantir a obtenção do máximo pela satisfação de

$$\delta^2 I/\delta \vec{x}'^2 \leq 0$$

que será um máximo absoluto se se verificar a condição de Weierstrass

$$I[\vec{x}^*,\vec{x}',t] + x'\frac{\delta M^*[\vec{x}^*,t]}{\delta \vec{x}} \leq I[\vec{x}^*,\vec{x}'^*,t] + \vec{x}'^*\frac{\delta M^*[\vec{x}^*,t]}{\delta \vec{x}}$$

i.e:

$$I[\vec{x}^*,\vec{x}',t] - I[\vec{x}^*,\vec{x}'^*,t] - (\vec{x}'-\vec{x}'^*)\frac{\delta M^*[\vec{x}^*,t]}{\delta \vec{x}'} \leq 0$$

Admitindo um estado final livre teremos para qualquer $\vec{x}(T)$

$$M^*[\vec{x}(T),T] = 0$$

e a condição de transversalidade será

$$\frac{\delta M^*[\vec{x}(T),T]}{\delta \vec{x}(T)} = \frac{\delta I[\vec{x}(T),\vec{x}'(T),T]}{\delta \vec{x}'(T)} = 0$$

A complementaridade destes dois métodos é sublinhada por Bellman que os apresenta como duais. Em termos geométricos a resolução do problema apresentado pelo cálculo de variações consiste na consideração da curva extrema como um somatório de pontos a determinar através do cálculo diferencial. A programação dinâmica encara a curva extrema como uma envolvente de tangentes e preocupa-se com o cálculo da inclinação óptima das tangentes que se podem considerar em cada ponto dessa curva, permitindo assim ultrapassar as dificuldades de cálculo e interpretação inerentes à utilização do primeiro destes métodos.

4.4. A PROGRAMAÇÃO DINÂMICA E O PRINCÍPIO DE PONTRYAGIN

A aplicação do princípio da optimalidade de Bellman a um problema de controlo óptimo do tipo

$$\text{Max} \int_0^T I\,[\vec{x}(t),\vec{u}(t),t]\,dt$$

conduz-nos à equação funcional

$$\underset{\vec{u}(t)}{\text{Max}}\ \{I[\vec{x}(t),\vec{u}(t),t] + \frac{\delta M^*[\vec{x}(t),t]}{\delta \vec{x}}\, g[\vec{x}(t),\vec{u}(t),t]\} = - \frac{\delta M^*[\vec{x}(t),t]}{\delta t}$$

Retomando a interpretação das variáveis duais de Pontryagin, i.e. considerando o seu valor inicial como a valorização atribuida à contribuição para o objectivo funcional devida à

$$\vec{y}(t) = \frac{\delta M^*[\vec{x}(t),t]}{\delta\vec{x}(t)}$$

e introduzindo esta definição na expressão entre chavetas da equação anterior reencontramos o Hamiltoniano

$$I[\vec{x}(t),\vec{u}(t),t] + \frac{\delta M^*}{\delta\vec{x}(t)}\, g[\vec{x}(t),\vec{u}(t),t] =$$

$$= H[\vec{x}(t),\vec{u}(t),\vec{y}(t),t]$$

e a equação funcional de Bellman, admitindo a existência de um controlo, $\vec{u}^*(t)$, que maximiza o hamiltoniano, identifica-se com a equação de Hamilton-Jacobi

$$\underset{\vec{u}(t)}{\mathrm{Max}}\ \{ H[\vec{x}(t),\vec{u}(t),\vec{y}(t),t] \} = - \delta M^*/\delta t$$

Derivando esta equação em ordem ao estado, $\vec{x}(t)$,

$$\delta H/\delta\vec{x} + (\delta H/\delta\vec{y})'(\delta^2 M^*/\delta\vec{x}^2) = - (\delta^2 M^*/\delta\vec{x}\delta t)$$

e diferenciando a expressão $\vec{y}(t) = \delta M^*/\delta\vec{x}$

$$\vec{y}' = \frac{d}{dt} = \vec{x}'(\delta^2 M^*/\delta x^2) + (\delta^2 M^*/\delta\vec{x}\delta t)$$

podemos obter as equações canónicas do Princípio de Pontryagin

$$\vec{x}'(t) = \delta H/\delta\vec{y}$$

$$\vec{y}'(t) = - \delta H/\delta\vec{x}$$

Admitindo um estado final livre, teremos

$$M^*[\vec{x}(T),T] = 0$$

para qualquer $\vec{x}(T)$ e a condição de transversalidade

$$\vec{y}(T) = \frac{\delta M^{*}[\vec{x}(T),T]}{\delta \vec{x}} = 0$$

Os dois métodos conduzem aos mesmos resultados mas diferenciam-se pelas possibilidades de aplicação e interpretação. Num problema como o anterior aplicado a sistemas contínuos o Princípio de Pontryagin conduz-nos directamente a soluções explicítas de fácil interpretação em termos económicos e com a vantagem de ao mesmo tempo nos fornecer as soluções duais. No entanto e, como já referimos,nem sempre é fácil determinar tais soluções em problemas concretos nem podemos garantir que se verifiquem as condições (de concavidade e linearidade) que tornam as condições necessárias também suficientes.

Nas aplicações empíricas, sobretudo na área económica em que é frequente os problemas serem formulados em termos discretos, a Programação dinâmica apresenta a vantagem de nos permitir construir algorítmos válidos tanto em termos contínuos como discreto (4). No próximo ponto apresentaremos algumas das possibilidades de utilização deste método na avaliação da política económica com problemas de controlo óptimo estocástico.

(1) Ao Princípio Fundamental da fptica apresentado por P. Fermat e referido por Helmer (1972), pag.VII

(2) Bellman (1965), pag.13. O autor remete ainda para a sua obra de 1957 Programação Dinâmica que apresenta como um estudo detalhado das bases deste método. Intriligator (1971, pag.342) refere o seguinte comentário formulado por Aris em 1964 a propósito do Princípio do Máximo **"If you don't do the best with what you happen to have got, you'll never do the best you might have done with what you should have had".**

(3) Com raciocínio análogo Intriligator (1971), pag. 329 apresenta-nos a expressão

$$\frac{\delta J^*[x(t),t]}{\delta t} = \underset{u(t)}{\mathrm{Max}} \left[I[x(t),u(t),t] + \frac{\delta J^*}{\delta x} f[x(t),u(t),t] \right]$$

como a equação de Bellman, a partir da qual (pag.342) pela consideração da trajectória óptima de controlo, $u^*(t)$, e a definição da função

$$H[x,\frac{\delta J^*}{\delta x},t] = I\,[x,u^*,t] + \frac{\delta J^*}{\delta x} f[x,u^*,t]$$

deduz a equação de Hamilton-Jacobi:

$$H[x,\frac{\delta J^*}{\delta x},t] + \frac{\delta J^*}{\delta t} = 0$$

(4) Na própria formulação do Princípio da Optimalidade Bellman apresenta uma situação concreta de afectação de um recurso escasso a várias actividades e mantém a preocupação de conjugar as formulações matemáticas com exemplos de aplicação empírica que possibilitem a sua interpretação. Exemplos que cobrem áreas de carácter económico e técnico, desde a maximização do valor da composição da carga de um navio, a determinação das despesas de uma campanha publicitária, um caso particular do conhecido problema de transportes de Hitchcook-Koopmans (com um reduzido número de depósitos e pontos de consumo), políticas de manutenção e substituição de equipamentos, plano de compras, produção e vendas de uma empresa com capacidade de armazenamento limitada e sujeita a variações sazonais dos preços, identificação de duas peças falsas através da pesagem de um conjunto k de peças de cada vez, plano de altitude-velocidade que minimize o tempo que um avião demora a percorrer determinado trajecto, etc.

5. APLICAÇÃO DO CONTROLO ESTOCáSTICO NA AVALIAÇÃO DA POLíTICA ECONOMICA

A utilização dos métodos de resolução de problemas de controlo óptimo da esfera económica com carácter determinista pressupõe que se ignore a incerteza, por uma das três razões apontadas por Kendrick (1981): admitirmos que o efeito da incerteza é suficientemente pequeno para não ter consequências importantes nos resultados do funcionamento do sistema económico, pensar-se que a inclusão da incerteza nos cálculos não alteraria os controlos óptimos obtidos ou, até, que ela poderia dificultar os cálculos e tornar os problemas insolúveis.

A discusssão da validade destas razões e dos efeitos da incerteza devida não só ao funcionamento do próprio sistema económico mas também dos modelos e parâmetros utilizados na sua caracterização têm contribuido para o desenvolvimento de métodos e técnicas econométricas, para o estudo da característica dinâmica das séries temporais e para a sua conjugação com as técnicas do controlo óptimo que, acompanhadas da divulgação das possibilidades da informática permitiram a formalização e aplicação das técnicas do **Controlo Optimo Estocástico.**

Autores como Aoki, Athans, Chow, Dasgupta, Fair, Forster, Heal, Henderson, Holdbrook, Kendrik, Livesey, Long, Pagan, Palash, Phelps, Pindyck, Pitchford, Prescott, Sargent, Turnovski, entre muitos outros, publicam trabalhos nesta área, com várias aplicações à esfera económica, nomeadamente modelos de utilização de recursos naturais, problemas de poluição e, com especial relevância, problemas de formalização e avaliação da política económica.

Como ilustração das possibilidades de aplicação das técnicas do controlo óptimo estocástico na avaliação da política económica escolhemos a metodologia proposta por **Gregory Chow** que procuraremos sitematizar nas próximas páginas.

Para este autor uma <u>política</u> no contexto da macroeconomia é uma estratégia relativa à escolha de variáveis de controlo (de política ou instrumentos) do sistema, variáveis essas que podem ser um subconjunto das variáveis exógenas de um modelo econométrico, ou endogeneizadas pela especificação de uma regra ou equação para uma variável de política.(1)

Chow considera ainda que "um problema central da política macroeconómica é a avaliação do comportamento da economia sob diferentes especificações dos instrumentos de política". E apresenta outras questões, relacionadas com este problema e relevantes para a política económica, que devem ser analisadas com os instrumentos do controlo óptimo dos sistemas estocásticos:

"1ª escolha dos objectivos em termos dos quais teu o comportamento pode ser avaliado

2ª dado o nosso conhecimento da economia, existirão políticas que servirão para atingirmos ou aproximarmo-nos desses objectivos?

3ª ...qual a qualidade das políticas e como as devemos formular...?

4ª ... que aproximação desejar de um objectivo, sacrificando a obtenção de outro...?

5ª como ordenar e comparar diferentes propósitos de política?

6ª como avaliar as políticas tradicionais?

7ª como escolher entre diferentes subconjuntos de instrumentos, nomeadamente entre políticas fiscais e monetárias?"(2).

Para avaliar a política económica e responder a todas estas questões Chow sistematiza um método que requer :

1) uma função objectivo com as principais variáveis económicas,

2) um modelo que represente o funcionamento da economia,

3) a distribuição provável da utilidade ou perca resultantes da actuação, já que as decisões e resultados se inserem num contexto de incerteza e há que contar com o factor "sorte",

4) a comparação dessa distribuição provável não apenas com outra resultante de uma decisão alternativa mas com as distribuições de todos os resultados relevantes nos períodos posteriores, uma vez que a actuação sobre o sistema tem repercussões imediatas e futuras.(3)

Especifiquemos estes requisitos e a utilização do método que o autor nos propõe. Os modelos utilizados serão lineares(4), supondo-se os parâmetros conhecidos ou desconhecidos e, neste caso diferencia-se a situação em que não se admite o processo de aprendizagem da outra, mais de acordo com as técnicas do controlo óptimo estocástico e dos controlos "closed loop", de revisão dos valores esperados dos parâmetros pela informação que se vai obtendo para o sistema. Abordaremos também a forma de se determinarem não só os parâmetros do modelo mas também a função objectivo a partir das observações obtidas para os estados e controlos da economia.

5.1. FUNÇÃO OBJECTIVO

A necessidade de definição dos critérios de avaliação dos resultados da política económica leva à formulação de uma função escalar que quantifique as qualidades das variáveis, represente, com a maior aproximação possível, as preferências dos responsáveis pelas decisões e explicite os objectivos pretendidos.

Tendo presente que a maior parte das decisões são tomadas num contexto de incerteza as variáveis incluidas na função objectivo são muitas vezes consideradas como aleatórias. Haverá então que encontrar critérios para medir a sua distribuição. Chow propõe que se utilizem as caracteristicas das séries temporais para a análise dinâmica, i.e. **média, variância e covariância** presentes no valor esperado de uma <u>função quadrática</u> das variáveis definidas pelo modelo estocástico.

Considerando:

y_t = vector que inclui as variáveis de estado (objectivo) e de controlo (política), actuais e desfazadas,

a_t = vector das trajectórias óptimas de estado e de controlo

K_t = matriz diagonal, semi-definida positiva com dimensão igual ao vector y_t e que representa o sistema de valorização do decisor, i.e. as ponderações que ele atribui aos objectivos e controlos incluidos em y_t,

a <u>função objectivo</u> poderá ser formulada como o valor esperado do quadrado dos desvios entre as trajectórias obtidas y_t e as trajectórias desejadas a_t, i.e.:

$$\text{Min } E\ W = E \sum_{t=1}^{T} (y_t - a_t)'\ K_t\ (y_t - a_t)$$

De fácil cálculo e interpretação, uma função objectivo com esta forma apresenta defeitos a ter presentes quando da interpretação dos resultados, nomeadamente, avalia de igual modo tanto os desvios positivos como os negativos e, pela sua forma aditiva, o valor esperado representa a soma de funções de variáveis em diferentes momentos e não reflecte as possíveis alterações nas variâncias, podendo obter-se o mesmo valor esperado em diferentes situações de risco.(5)

No entanto, e uma vez que com a função objectivo se pretende uma procura sistemática das melhores políticas a adoptar e que há sempre a possibilidade de correcção que dos valores das trajectórias óptimas, a_t, que das ponderações definidas pelos valores da matriz K_t, apesar dos defeitos referidos a função quadrática continua a ser largamente utilizada.

Para maior facilidade do processo de decisão muitas vezes a função objectivo (tal como o problema em que se insere) decompõe-

-se em duas partes: uma **deterministica**, W_1 que pode ser calculada no início do intervalo de regulação e outra **aleatória**, EW_2, independente da primeira e que se alterará com a evolução do sistema.

A função objectivo, na forma quadrática apresentada, será:

$$\text{Min } EW = \sum_{t=1}^{T} (\bar{y}_t - a_t)' K_t (\bar{y}_t - a_t) + E \sum_{t=1}^{T} y^{*'}_t K_t y^*_t = W_1 + EW_2$$

onde $y^*_t = (y_t - \bar{y}_t)$

5.2. MODELO DE REPRESENTAÇÃO DO SISTEMA ECONOMICO

Como já referimos com modelos estocásticos podemos utilizar controlos de tipo "closed-loop", i.e. especificar as variáveis de controlo como função de observações futuras - regra de controlo ou equação de controlo "feedback". Quando o controlo estocástico se aplica à avaliação da política económica esta equação indica a interdependência entre a escolha das políticas (ou controlos) e os resultados obtidos nos períodos anteriores, por um mecanismo de retroacção.

Como exemplo de uma regra de controlo feedback temos a equação linear:

$$x_t = G_t y_{t-1} + g_t$$

onde:

x_t = vector das variáveis de controlo ou de política

G_t = matriz dos coeficientes da equação que medem a intensidade e a forma de correcção dos desvios

y_{t-1} = vector das variáveis que definem o estado do sistema no período anterior

g_t = vector de interceptos que representa o efeito das variáveis exógenas não sujeitas a controlo e orienta o nível das respostas em função da trajectória óptima definida para as variáveis de estado no período anterior.(6)

Os cálculos necessários para a definição de G e g dependerão obviamente das características do modelo escolhido para a representação do sistema económico.

Para apresentação dos principais resultados utilizaremos um modelo linear de parâmetros conhecidos que, na sua forma reduzida pode ser formulado como:

$$y_t = A_t y_{t-1} + C_t x_t + b_t + u_t$$

onde:

y_t = vector onde se incluem as variáveis de estado ou objectivo e as variáveis de controlo (x_t), i.e. todas as variáveis dependentes, correntes ou desfazadas.

x_t = vector das variáveis de controlo, i.e. instrumentos da política económica

A_t e C_t = matrizes já determinadas e constantes

b_t = vector das variáveis exógenas, não controladas

u_t = vector de variáveis residuais não correlacionadas, de média zero e matriz de covariâncias V.

5.3. RESOLUÇÃO DO PROBLEMA

O problema de controlo óptimo a resolver consiste na determinação dos controlos

$$x_t = G_t y_{t-1} + g_t$$

que satisfaçam o objectivo de minimização

$$\text{Min } E\, W = E \sum_{t=1}^{T} (y_t - a_t)' K_t (y_t - a_t)$$

com as restrições das características de funcionamento do sistema

$$y_t = A_t y_{t-1} + C_t x_t + b_t + u_t$$

Na sua resolução vamos considerar que o problema se pode subdivir em dois: um determinista e um estocástico. Utiliza-se o método da programação matemática, muito semelhante ao Princípio de Pontryagin em tempo discreto mas com a vantagem de não precisarmos de definir variáveis simultaneamente no espaço primal e dual.

5.3.1. Problema de controlo determinista

Procuramos o controlo óptimo $\bar{x}_t$ que minimize:

$$W_1 = \sum_{t=1}^{T} (\bar{y}_t - a_t)' K_t (\bar{y}_t - a_t)$$

com:

$$\bar{y}_t = A_t \bar{y}_{t-1} + C_t x_t + b_t$$

$$\bar{y}_0 = y_0$$

A resolução do problema inicia-se no último período do intervalo, i.e. com t=T, e continua"backward", i.e. desde T até ao momento inicial.

Em t=T a <u>regra do controlo</u> será:

$$x_T = G_T\, y_{T-1} + g_T$$

Para obter a matriz G consideramos a condição inicial

$$K_T = H_T$$

e o sistema de equações

$$G_T = -(C'_T H_T C_T)^{-1} C'_T H_T A_T$$

$$H_{T-1} = K_{T-1} + A'_T H_T (A_T + C_T G_T) \quad (9)$$

e vamos determinando G_T, H_{T-1}, G_{T-1}, etc.

Por outro lado, calculamos g_T, h_{T-1}, g_{T-1}, etc.

com a condição inicial:

$$h_T = K_T a_T$$

e o par de equações:

$$g_T = -(C'_T H_T C_T)^{-1} C'_T (H_T b_T - h_T)$$

$$h_{T-1} = K_{T-1} a_{T-1} - A'_T H_T (b_T + C_T g_T) + A'_T h_T$$

Conhecidos a matrix G_t e o vector g_t, o vector de controlo óptimo, x_t obtém-se como função linear do vector de estado (y_{t-1}), pela <u>regra do controlo</u>:

$$x_t = G_t y_{t-1} + g_t \qquad (t=1,\ldots,T)$$

5.3.2. Problema de controlo estocástico

A parte estocástica do problema pode ser formulada como:

$$\text{Min } EW_2 = E \sum_{t=1}^{T} y^{*\prime}_t K_t y^*_t$$

com

$$y^*_t = A_t y^*_{t-1} + C x^*_t + u_t$$

$$y^*_0 = 0$$

Neste caso a regra de controlo será a equação linear:

$$x^*_t = G_t \, y^*_{t-1} \qquad (t=1,\ldots,T)$$

mantendo a condição inicial

$$H_T = K_T$$

encontra-se pela metodologia anterior a mesma matriz G_t e o controlo óptimo x^*_t obtém-se pela equação de controlo como função de y^*_{t-1}, mais uma vez "backward", i.e. partindo de T até ao início do intervalo.

5.2.3. Solução do problema global

Combinando os resultados obtidos para a parte determinística e a parte estocástica do problema podemos concluir que o vector da política óptima, $x_t = \bar{x}_t + x^*_t$, se obtém como função do vector de estado pela regra do controlo:

$$x_t = G_t y_{t-1} + g_t$$

Introduzindo esta regra de controlo no modelo linear de parâmetros conhecidos apresentado obtemos um sistema dinâmico:

$$y_t = (A_t + C_t G_t) y_{t-1} + (b_t + C_t g_t) + u_t$$

É pelo estudo das características dinâmicas (10) deste sistema que se consegue a integração das técnicas do controlo óptimo com os métodos da dinâmica estocástica.

Tal como o problema também a <u>perda esperada</u>, medida pela função objectivo, se pode decompôr em duas partes:

- a parte determinística, W_1, que nos permite definir

$$y_t = (A_t + C_t G_t) y_{t-1} + C_t g_t + b_t$$

- a parte estocástica que mede a importância das perturbações aleatórias nos cálculos e se define como:

$$EW_2 = \sum_{t=1}^{T} tr(K_t J_{.t})$$

onde as matrizes covariância, $J_{.t}$ se podem obter, conhecidos G_t e H_t, pela expressão:

$$J_{.t} = V + (A_t + C_t G_t)\, J_{.t-1} (A_t + C_t G_t) \quad (t=1,\dots,T)$$

$$e \;\; V = E u_t y^{*\prime}_t = E u_t u'_t$$

Como extensão da regra de Tinbergen Chow demonstra um <u>teorema</u> que formula como:

"Se o número de variáveis objectivo (o número de elementos diferentes de zero da matriz diagonal K_t, (pxp) for igual ao número $q < p$ das variáveis de controlo, a trajectória temporal y_t gerada pelo sistema determinístico sujeito a controlo, atingirá exactamente os objectivos e a parte determinística W_1 da mínima perca esperada será nula, desde que C_t seja de ordem q." (10)

Tendo como corolário:

"Se o número de variáveis objectivo for menor ou igual ao número de instrumentos, a trajectória temporal y_t gerada pelo sistema determinístico sob controlo atingirá exactamente os objectivos e a parte determinística da mínima perca esperada será nula."(11)

A possibilidade de incluirmos no vector das variáveis de estado as necessárias variáveis de controlo, sem com isso aumentarmos a parte determinística da função objectivo nem a soma dos valores esperados das outras variáveis objectivo, garante-nos a condição necessária a modelos com as características do apresentado, de o número de variáveis objectivo não ser nunca menor que o número dos instrumentos.

Se o número das variáveis de estado for maior que o número dos controlos utilizados tanto W_1 como EW_2 serão positivas mas, continua a ser possível a utilização do mesmo conjunto de equações de controlo e, neste caso já não será preciso inclui as variáveis instrumentais no vector de estado que por si já possui as suficientes variáveis dependentes.

Nestas condições e supondo-se conhecidos e constantes os coeficientes do modelo linear em estudo e admitindo-se também que a matriz K de valorização dos objectivos é contante, Chow apresenta como condição necessária e suficiente para a obtenção de uma solução estacionária de convergência para a trajectória desejada que todas as raízes da matriz **R = A + CG** sejam em valor absoluto menores que a unidade.

Conhecida a matriz G da solução estacionária o vector g também o poderá ser uma vez que os objectivos representados por a_t não se alterarão com o tempo e obtemos um vector de controlos óptimos x_t que, sendo utilizados, darão origem a uma <u>série temporal</u> y_t de estados do sistema que também se poderá decompôr em duas partes: a determinística e a estocástica, i.e.:

$$y_t = \bar{y}_t + y^*_t$$

fazendo

$$\tilde{b}_t = b_t + Cg_t$$

e

$$R = A+CG$$

temos:

$$y_t = R^t y_0 + (\tilde{b}_t + R\tilde{b}_{t-1} + \ldots + R^{t-1}\tilde{b}_1) +$$
$$+ u_t + Ru_{t-1} + \ldots + R^{t-1}u_1$$

A primeira parte desta expressão é a <u>média</u> do processo designado por $\bar{y}_t$ e idêntica à trajectória temporal encontrada para o sistema determinista.

A segunda é o <u>desvio da média</u>, i.e. a parte aleatória do processo gerado por

$$y^*_{t-1} + u_t.$$

A mínima perda esperada no caso estocástico engloba a perda do caso determinista (devida aos desvios de y_t de a_t) e a perda originada pelas perturbações aleatórias representadas por

$$y^*_t = y_t - \bar{y}_t.$$

Nestas condições, mesmo assumindo que o número de instrumentos iguala o número de objectivos não podemos esperar que a série temporal gerada no processo de controlo, y_t, coincida exactamente com os objectivos determinados.

Numa situação em que a perda esperada da parte determinística, W_1, seja nula, há a probabilidade da perda esperada da parte escocástica, EW_2, ser positiva. A importância desta segunda parte, é sublinhada por Chow que demonstra com dados empíricos o seu maior peso em relação à parte determinista da função objectivo (12), confirmando a impossibilidade de se eliminar a incerteza num processo de controlo. Não sendo possível eliminá-la Chow propõe que se inclua a incerteza no processo de controlo nos termos apresentados no próximo ponto.

5.4. INTRODUÇÃO DA INCERTEZA NO PROCESSO DE CONTROLO

A incerteza no processo de decisão baseia-se muitas vezes na desconfiança ou desconhecimento dos valores dos parâmetros do modelo econométrico utilizado.

Podemos exprimir essa incerteza em termos da média e covariâncias dos parâmetros a partir das observações sobre o sistema. As equações de controlo óptimo e a perda mínima de bem estar serão deduzidas como função desse vector média e da matriz covariâncias dos parâmetros do modelo.

Distinguem-se duas situações:

- uma em que os cálculos dos valores esperados dos parâmetros se baseiam naa informação obtida nos dois primeiros momentos do intervalo e não se alteram posteriormente (processo **sem aprendizagem**);

- outra em que além de toda a informação recolhida até ao periodo do controlo ainda se incorporam todas as previsões para os estados futuros do sistema nos cálculos dos valores esperados dos parâmetros (processo **com aprendizagem**).

5.4.1. Controlo óptimo de sistemas lineares de parâmetros desconhecidos, sem aprendizagem

Continuamos a utilizar a função objectivo quadrática definida no ponto 5.1. e no modelo apresentado no ponto 5.2. introduzimos a incerteza dos parâmetros expressa pelo vector média e a matriz covariância destes parâmetros.

O modelo terá a formulação:

$$y_t = A_1y_{t-1}+\dots+A_my_{t-m} + C_0x_t+\dots+C_nx_{t-n} + Bw_t + u_t$$

onde:

y_t = vector de estado de p variáveis dependentes

x_t = vector de controlo de dimensão q

w_t = vector de r variáveis exógenas não sujeitas a controlo;

Por conveniência fazemos $Bw_t = b_t$

u_t = vector de p variáveis residuais de distribuição normal, média zero e matriz covariâncias **V**, também desconhecida e não correlacionada no tempo com os parâmetros A, C e D

$A_1,\dots,A_m$; $C_0,\dots,C_n$ e D são os parâmetros desconhecidos considerados como aleatórios (tanto podem sê-lo de facto como constantes mas, desconhecidos dos agentes decisores).

Tal como nas situações anteriores a resolução começa no período T seguindo "backward" até ao início do intervalo.

A <u>equação de controlo</u>:

$$x_t = G_t y_{t-1} + g_t$$

de cada período é <u>linear</u> em y_{t-1} <u>se</u> os valores esperados **condicionais necessários para determinar G_t e g_t forem calculados sem ter em consideração os valores de y_{t-1}, y_{t-2},... e x_{t-1}, x_{t-2},...**

Designando por E_t o valor esperado condicional, dada toda a informação possível no final do período t, podemos calcular as matrizes G_T, H_{T-1}, G_{T-1}, etc. utilizando o par de equações:

$$G_t = -(E_{t-1}C'_t H_t C_t)^{-1} (E_{t-1}C'_t H_t A_t)$$

$$H_{t-1} = K_{t-1} + E_{t-1}(A'_t H_t A_t) + G'_t (E_{t-1}C'_t H_t A_t)$$

com t = T, T-1,...,1

e a condição inicial:

$$H_T = K_T$$

Os valores da matriz C_t são tomados inicialmente como:

$$c_T = a'_T K_T a_T \quad (\text{ou } c_T = 0)$$

e a seguir pela expressão:

$$c_{t-1} = E_{t-1}(b_t+C_t g_t)' H_t (b_t+C_t g_t) - 2E_{t-1}(b_t+C_t g_t)' h_t +$$
$$+ a'_{t-1} K_{t-1} + E_{t-1} u'_t H_t u_t + E_{t-1} c_t$$

onde $t=T, T-1, \ldots, 1$

Para determinar g_T, h_{T-1}, g_{T-1}, etc. resolvemos o sistema de equações:

$$g_t = -(E_{t-1}C'_t H_t C_t)^{-1} \quad (E_{t-1}C'_{t-1} H_t b_t) - (E_{t-1}C'_t) h_t$$

$$h_{t-1} = K_{t-1} a_{t-1} + E_{t-1}(A_t+C_t G_t)' h_t - E_{t-1}(A'_t H_t b_t) -$$
$$-G'_t (E_{t-1}C'_t H_t b_t)$$

tomando como condição inicial:

$$h_T = K_T a_T$$

e as equações acima indicadas para os parâmetros c_t.

A resolução dos sistemas anteriores requer o cálculo dos <u>valores esperados condicionais</u>, invariantes com o tempo, já que se baseiam na informação obtida no final do período inicial, das matrizes $E(C'H_tC)$, $E(C'H_tA)$, $E(C'H_tb_t)$, $E(A'H_tA)$ e $E(A'H_tb_t)$.

Estes valores são funções dos segundos momentos de A, C e b_t e podem ser calculados a partir dos parâmetros do modelo original.

Considera-se a forma reduzida do modelo com a formulação

$$y_t = A_1 y_{t-1} + \ldots + A_m y_{t-m} + C_1 x_{t-1} + \ldots + Z_2 x_t + Z_3 w_t + u_t$$

i.e.

$$\begin{bmatrix} y_t \\ y_{t-1} \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{t-m+1} \\ x_t \\ x_{t-1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{t-n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \ldots A_m & C_1 \ldots C_n \\ I \ldots 0 & 0 \ldots 0 \; 0 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ 0 \ldots I & 0 \ldots 0 \; 0 \\ 0 \ldots 0 & 0 \ldots 0 \; 0 \\ 0 \ldots 0 & I \ldots 0 \; 0 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ 0 \ldots 0 & 0 \ldots I \; 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ y_{t-2} \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{t-m} \\ x_{t-1} \\ x_{t-2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{t-n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z_2 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ I \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} x_t + \begin{bmatrix} Z_3 w_t \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ I \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_t \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}$$

Fazendo

$$Z_1 = (A_1, \ldots, A_m; C_1, \ldots, C_n)$$

temos

$$A = \begin{bmatrix} & Z1 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} Z_2 \\ 0 \\ I \\ 0 \end{bmatrix} \qquad b_t = \begin{bmatrix} Z_3 w_t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e a partição da matriz H

$$H = \begin{bmatrix} H11 & \ldots & H14 \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ H41 & \ldots & H44 \end{bmatrix}$$

com as matrizes da diagonal principal, H11,...,H44, de dimensões, respectivamente, p, $(m-1)p$, q e $(n-1)q$, sendo

p = variáveis endógenas e

q = variáveis de controlo

Com estas partições das matrizes podemos obter as expressões que nos permitem calcular os produtos C'HC, C'HA, C'Hb$_t$, A'HA e A'Hb$_t$. Para o cálculo dos respectivos valores esperados em função dos dois momentos iniciais do valor dos parâmetros da forma reduzida das equações originais.

Considerando

$$Z = (Z_1, \quad Z_2, \quad Z_3)$$

com Z = média de Z e

$s = p + (m-1)p + q + (n-1)q$

$z_1 \ldots z_s$ = colunas de Z

Q = matriz covariâncias de z

obtemos

$$E\, z\, z' \;=\; z\, z' + Q$$

Obtido este resultado há que calcular a <u>média</u>, z, e a <u>matriz covariâncias</u> de z.

Para o conseguir Chow propõe-nos a utilização de dois métodos:

1) método bayesiano

2) método de aproximação através da distribuição assimptótica dos parâmetros estruturais que nos permitirá obter os parâmetros da forma reduzida.

Assumindo que antes do processo de controlo se dispunha de **N** observações do sistema com

Y = matriz de observações das variáveis objectivo, de dimensão Nxp

O = matriz de observações das variáveis instrumento, Nxs

podemos reescrever o sistema original como:

$$Y = O\ Z' + U$$

A utilização do <u>método</u> <u>bayesiano</u> requer:

a) O cálculo das densidades posteriores de Z e da inversa da matriz covariâncias de U, que designamos por R, dadas as observações Y e que se obtêm com uma função de verosimilhança:

$$p(\ Z\ ,R|Y) \propto |R|^{0,5s} \exp[-0,5trR\ (Z-\hat{Z})\ O'O\ (Z-\hat{Z})'\ \times$$

$$\times\ |R|^{0,5(N-p-1-s)} \exp(-0,5\ trRS) \propto p(\ Z|R,Y) \times p(\ R|Y)$$

onde

$$\hat{Z}' = (O'O)^{-1}\ O'Y$$

$$S = (Y' - \hat{Z}'O')(Y - O\ \hat{Z}\ )$$

o simbolo $\propto$ indica "proporcional a"

b) Utilizando a densidade posterior de Z e R é possível obter a matriz covariâncias de Z pela expressão

$$\text{cov}\ Z = (N - s - p - 1)^{-1}\ (O'O)^{-1} \otimes S$$

(por $\otimes$ designamos o "produto de Kronecker")

onde a matriz S e o escalar N-s são parâmetros

Com o **método da solução aproximada** continuamos a considerar N observações do sistema

$$Y = O\,Z' + U$$

que pode escrever-se como

$$YB' + O\,\Gamma' = E$$

onde

cada linha de E é independente das outras e tem uma distribuição normal

$(\tilde{B}\ \tilde{\Gamma})$ são matrizes com linhas que se obtêm da forma estrutural do modelo que se relacionam com os parâmetros da forma reduzida pela expressão:

$$Z = -B^{-1}\,\Gamma$$

Para uma aproximação dos valores do vector média e da matriz covariâncias dos elementos estimados, z, fazemos:

$(\breve{B}\ \breve{\Gamma})$ = estimativas consistentes e assintoticamente não bayesianas de $(B\ \Gamma)$, onde as colunas **p+s** têm uma matriz de covariâncias assintóticas = **W**

as estimativas das colunas da forma reduzida terão uma matriz de covariâncias assintóticas aproximadamente igual a:

$$Q = [\ (\breve{Z}'I_s) \otimes B^{-1}\ ]\ W\ [\ (\tilde{Z}'I_s) \otimes B^{-1}\ ]$$

com I_s = matriz identidade de ordem s

Embora o método bayesiano conduza a resultados mais exactos do que o método aproximativo, este último apresenta a vantagem de incorporar as restrições impostas aos parâmetros da forma estrutural, uma vez que os parâmetros da forma reduzida são obtidos como funções não lineares dos parâmetros da forma estrutural

$$Z = - B^{-1} \Gamma .$$

Para análise dos efeitos, na equação de controlo e no valor da perda mínima esperada, da introdução da incerteza dos parâmetros do modelo linear, sem aprendizagem, reescreve-se o modelo como:

$$\beta_t = \alpha_t \; \beta_{t-1} + \Gamma \; x_t + v_t$$

onde:

$$\beta_t = \begin{bmatrix} y_t \\ w_{t+1} \end{bmatrix}$$

$$\alpha_t = \begin{bmatrix} A & Z_{3t} \\ 0 & D_t \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad Z_{3t} = \begin{bmatrix} Z_3, & a_t \end{bmatrix} \; ; \quad d_t = \frac{w_t}{w_{t-1}}$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} C \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$v_t = \begin{bmatrix} u_t \\ 0 \end{bmatrix}$$

Considerando ainda que

$$\alpha^* = \alpha - \alpha \qquad \text{e}$$

$$\Gamma^* = \Gamma - \Gamma$$

as **equações de controlo** não incluiem o vector g_t, uma vez que se rejeitam as possíveis alterações dos valores de y_t e de x_t pela não introdução de aprendizagem, e podem formular-se:

no caso determinista:

$$\bar{G}_t = - (\bar{\Gamma}' H_t \bar{\Gamma})^{-1} (\Gamma' H_t \alpha_t)$$

no caso incerto:

$$G_t = - (\bar{\Gamma}' H_t \bar{\Gamma} + E\, \Gamma^{*\prime} H_t \Gamma^*)^{-1} (\bar{\Gamma}' H_t \bar{\alpha}_t + E\, \Gamma^{*\prime} H_t \alpha^*)$$

o que nos leva a admitir a possibilidade de se obter uma maior resposta na situação de incerteza pois se por um lado as variâncias em Γ^* podem conduzir à redução de G_t, por outro as covariâncias entre Γ^* e α^* podem ser utilizadas na procura de uma melhor política.

Para determinar se a incerteza poderá levar a um aumento da perda mínima esperada consideramos esta perda para o último período, dadas as condições iniciais β_{T-1} quaisquer:

$$E\, (\alpha_T + \Gamma_T G_T)' H_T (\alpha_T + \Gamma_T G_T) - (\bar{\alpha}_T + \bar{\Gamma}_T \bar{G}_T)' H_T (\bar{\alpha}_T + \bar{\Gamma}_T \bar{G}_T) =$$

$$= E\, \alpha^{*\prime} H_T \alpha^* + G'_T (\bar{\Gamma}' H_T \bar{\Gamma} + E\, \Gamma^{*\prime} H_T \Gamma^*)\, G_T - \bar{G}'_T \bar{\Gamma}' H_T \bar{\Gamma} \bar{G}_T$$

que será uma matriz semidefinida positiva, equivalente à diferença entre a matriz covariâncias da regressão múltipla, quando se admitem e quando não se admitem erros de observação o que, por si só, não conduzirá a um aumento da variância dos residuais.

No entanto, apesar da incerteza não aumentar a perda mínima esperada no período T, a não inclusão da aprendizagem sobre o comportamento dos parâmetros conduz à acumulação da incerteza , quando seguimos "backward" até ao período 1, num processo definido por:

$$V_t = \beta'_{t-1}\, E_{t-1}(\alpha_t + \Gamma\, G_t)'\, H_t(\alpha_t + \Gamma\, G_t)\, \beta_{t-1} + c_{t-1}$$

e

$$H_{t-1} = Q_{t-1} + E_{t-1}\,(\alpha_t + \Gamma\, G_t)'\, H_t\, \alpha_t + \Gamma\, G_t)$$

5.4.2. <u>Controlo óptimo de sistemas lineares de parâmetros desconhecidos com aprendizagem</u>

Num processo de controlo óptimo a aprendizagem passiva é sempre possível, uma vez que no final de cada período se podem rever as estimativas dos parâmetros do modelo pelas informações obtidas sobre o estado do modelo e alterar os controlos para o período seguinte.

O método de Chow que aqui se apresenta é o de incorporar informação sobre os parâmetros que se prevêm para o futuro quando se determina a política a adoptar no presente.

O modelo utilizado pode manter a forma:

$$y_t = A\, y_{t-1} + C\, x_t + u_t$$

sendo

y_t = vector de estado que inclui variáveis endógenas e de controlo

x_t = vector dos instrumentos

A e C = matrizes de parâmetros desconhecidos

u_t = vector de variáveis residuais com média zero e matriz de covariâncias = V, também desconhecida

A <u>função objectivo</u> continua a ser quadrática mas não aditiva:

$$W = 0{,}5 \sum_{t=1}^{T} y'_t K_{t,t} y_t + \sum_{t=1}^{T} \sum_{s<t} y'_t K_{t,s} y_s + \sum_{t=1}^{T} y'_t k_t + d$$

onde

$K_{t,s}=K'_{s,t}$, k_t e d são constantes conhecidas

Começando a resolver no período T decompomos a perda mínima esperada em duas partes:

W_T = perda atribuidas às variáveis de estado y_t que podem ser controladas por x_t

W_{NT} = perda não controlável por x_t

e teremos

$$E_{T-1}W_T = E_{T-1}W_T + W_{NT}$$

A minimização da primeira parte é conseguida com a substituição de y_t pela sua expressão no modelo e introduzindo valores esperados pelo método bayesiano. (13)

Minimizando a expressão de $E_{T-1}W_T$ pela diferenciação em ordem a x_T obtemos a <u>equação de controlo</u>:

$$x_T = -\left(E_{T-1} C' H^T_{T,T} C\right)^{-1} \left[E_{T-1} \left(C' H^T_{T,T} A + C' H^T_{T,T-1}\right) y_{T-1} + \left(E_{T-1} C'\right) \left[\sum_{s=1}^{T-2} H^T_{T,s} y_s + h^T_T \right] \right]$$

que nos indica qual a política a adoptar tendo em consideração toda a informação disponível pelas observações dos estados

$y_1,...,y_{T-1}$. Estas observações terão também efeitos sobre as densidades posteriores das matrizes dos parâmetros assim como nos valores esperados utilizados na minimização da perda esperada que terá que ser corrigida.

Obtém-se assim uma função quadrática em $y_{T-1},...,y_1$ que se conjuga com W_{NT} de forma a obter-se a mínima perda esperada W em T-1, dado x_T, continuando o processo "backward" até ao período inicial.

Para a correcção da mínima perda esperada necessitamos de uma aproximação da trajectória que se prevê para o futuro e que se pode obter pela aplicação do conjunto das equações de controlo, supondo os parâmetros conhecidos ou desconhecidos mas sem aprendizagem, dadas as condições iniciais do primeiro período do intervalo e fazendo $u_t = 0$.

Por um processo iterativo de sucessivas correcções da função objectivo e das equações de controlo determina-se o controlo óptimo para o primeiro período normalmente com poucas iterações.

5.5. DETERMINAÇÃO DOS OBJECTIVOS DA POLÍTICA ECONÓMICA

Além da incerteza sobre o valor dos parâmetros do modelo escolhido para representar o modelo económico há o desconhecimento dos objectivos que determinam a actuação das autoridades governamentais que raras vezes os expressam de forma explícita e quantificada, de forma a podermos determinar os valores a atribuir aos coeficientes "a" que incluímos na função de bem estar.

Chow (1981) propõe-nos um método que nos permite, a partir dos valores observados para as variáveis objectivo, y_t, e de política, x_t, estimar os parâmetros do modelo:

$$y_t = Ay_{t-1} + Cx_t + b + u_t$$

e da função objectivo quadrática:

$$W = \sum_{t=1}^{T} (y_t - a_t)' K_t (y_t - a_t)$$

A regra do controlo será ainda:

$$x_t = G_t y_{t-1} + g_t$$

mas supomos:

$$K_t = \beta^t K \quad e$$

$$a_t = \Phi^t a$$

onde:

β = factor de desconto

Φ = matriz diagonal, cujos elementos serão iguais à unidade se corresponderem a objectivos constantes no tempo

Retomando as expressões já apresentadas para o cálculo dos valores de G_t e g_t, que agora serão função de A, C, b, β, K, Φ e a, constroi-se uma função lagrangeana que nos fornece as expressões necessárias para a determinação das incógnitas (14) :

$$L = \text{constante} - n/2 \log |\Sigma| - \log |V| -$$
$$- 1/2 \, tr[\Sigma^{-1} (Y' - AY'_{-1} - CX' - bz') (Y - Y_{-1}A' - XC' - zb')] -$$
$$- 1/2 \, tr [V^{-1} (X' - GY'_{-1} - gz') (X - Y_{-1}G' - zg')] -$$
$$- tr \{ \Omega [(C'HC)G + C'HA] \} -$$
$$- 1/2 \, tr \{ \Phi [H - K - \beta(A+CG)' H (A + CG)] \} -$$
$$- w' [(C'HC) g + C'(Hb - h)] -$$
$$- f' \{ [I - \beta(A + CG)'] h - Ka + \beta(A + CG)'Hb \} -$$
$$- 1/2 \, \theta [tr(KK) - r]$$

onde:

Y = matriz nxp das observações das variáveis endógenas

Y_{-1} = matriz nxp das observações das variáveis endógenas desfasadas

X = matriz nxp das observações das variáveis de controlo

z = vector de n unidades (variáveis "dummy")

Ω (pxq) e $\Phi = \Phi'$ (pxp) são matrizes de multiplicadores de Lagrange

w (qx1) e f (px1) são vectores de multiplicadores de Lagrange.

As <u>incógnitas</u> do problema, Σ, V, A, C, b, G, H, g, h, K e a, podem ser obtidas por um processo que se resume a quatro passos:

<u>primeiro</u>:

Assumindo que a matriz das observações das variáveis objectivo tem uma dimensão nxp, superior ou igual à da matriz das observações dos instrumentos, nxq, teremos para os vectores dos multiplicadores de Lagrange:

$$f = 0 \quad \text{e} \quad w = 0$$

<u>segundo</u>:

As matrizes covariâncias

Σ (do vector residual u_t) e

V (supondo a existência de variáveis residuais na equação de controlo)

calculam-se com as expressões:

$$n\,\Sigma - (Y' - AY'_{t-1} - CX' - bz')(Y - Y_{t-1}A' - XC' - zb') = 0$$

$$n\,V - (X' - GY'_{t-1}t - gz')(X - Y_{t-1}G' - zg') = 0$$

tendo os coeficientes de A, C, b, G e g sido previamente calculados pelo métodos dos mínimos quadrados.

terceiro:

Estas estimativas e os valores considerados para a matriz K são revistos utilizando:

1) $(C'HC)G + C'HA = 0$ e

$H - K - \beta(A + CG)'H(A + CG) = 0$ para calcular G e H.

2) $Y'_{t-1}(X - Y_{t-1}G' - zg')V^{-1} - \Omega C'HC = 0$

para obter a matriz dos multiplicadores de Lagrange Ω

3) $\Phi = \beta(A + CG)\ \Phi\ (A + CG)' - (A + CG)\ \Omega C' - C\ \Omega'(A + CG)'$

permite-nos obter o valor de Φ.

4) Considerando as derivadas da função lagrangeana em ordem a K apenas para os valores de K diferentes de zero (correspondentes aos objectivos **a** incluidos na função de bem estar) temos:

$K = \Theta^{-1}$, o multiplicador de lagrange Θ calcula-se por:

$$\Theta^{2} = tr(\Phi^{*}\Phi^{*})\ /\ r$$

5) Os valores de A e C obtêm se por:

$$Y'_{t-1}(Y-Y_{t-1}A'-XC'-zb')\ \Sigma^{-1} - \Omega\ C'H + \beta\ \Phi\ (A+CG)'H - \beta\ \Phi\ (Hb-H)' = 0$$

$$X'(Y-Y_{t-1}A'-XC'-zb')\ \Sigma^{-1} - \Omega'(A+CG)'H - G\ \Omega\ C'H + \beta\ G\ \Phi\ (A+CG)'H -$$
$$- g\ w'C'H - w\ g'C'H - w\ (Hb-h)' - \beta\ G\ \Phi\ (HB-H)' = 0$$

6) Calculamos ainda:

$$b = n^{-1} (Y' - AY'^{-1} - CX')z$$

$$g = n^{-1} (X' - GY'_{t-1})\ z$$

O processo repete-se iterativamente até se atingir a convergência dos valores de A, C, b, G e g.

<u>quarto</u>

Resolvemos $[\ I - \beta(A + CG)'\ ]\ h - Ka + \beta(A + CG)'Hb = 0$ para calcularmos o valor de h.

Utilizando este resultado e designando por R a matriz (A +CG) podemos finalmente calcular o valor de a pela expressão:

$$C'\ [\ I - \beta\ R'\ ]\ \ Ka = C'HCg + C'\ [\ I - \beta(I - \beta R')^{-1}R'\ ]\ \ Hb$$

Esta solução só será única se tivermos o número r de variáveis objectivo igual ao número q de variáveis de controlo.

5.6. AVALIAÇÃO DA POLÍTICA ECONÓMICA

O método proposto para avaliação da política económica baseia-se nos resultados obtidos na resolução de modelos lineares do tipo dos apresentados nos pontos anteriores pela programação dinâmica que, como referimos, nos permite decompor o valor esperado da perda de bem estar em duas partes:

-para o período corrente, i.e. efeitos imediatos da política adoptada e

-para os períodos posteriores, já que a nossa actuação sobre o sistema vai alterar o seu estado e as respostas a esperar de actuações futuras.

Obtidas as equações de controlo pelo processo "backward" já referido, podemos minimizar a soma dos valores esperados para as perdas mínimas de todos os períodos com respeito à política do período inicial, x_1, assumindo pelo princípio de Bellman que todos os controlos futuros, $x_2,\ldots,x_T$, serão óptimos, soma essa que se define por:

$$V_1 = x'_1 C'_1 H_1 C_1 x_1 + 2x'_1 C'_1 (H_1 A_1 y_0 H_1 b_1 - h_1) + (A_1 y_0 + b_1)' H_1 (A_1 y_0 + b_1) + Eu'_1 H_1 u_1 - + 2(A_1 y_0 + b_1)' h_1 + c_1$$

Para avaliação da política seguida no primeiro período calculamos a diferença entre a perda mínima obtida com a política real e a que se obteria pela política óptima:

$$V_1(x_1) - V_1(x_1)$$

Se quizermos avaliar uma sequência de políticas, para N períodos, com N < T calculamos:

$$\sum_{1=1}^{N} [\, V_t(x_t) - V_t(x_t) \,]$$

Torna-se assim possível a avaliação da política económica para qualquer período ou sequências de períodos, dentro do intervalo do controlo, garantindo-se controlos de tipo "closed-loop", uma vez que as decisões vão sendo determinadas de acordo com os estados do sistema em cada período mas, atendendo sempre às respostas, imediatas e futuras, que se prevêm com a nossa actuação.

5.7. OUTRAS QUESTÕES RELEVANTES PARA A POLÍTICA ECONÓMICA

Na introdução a este ponto de apresentação da metodologia de Chow citámos as questões que ele considera estritamente relacionadas com a avaliação da política económica e que podem ser analisadas pelas técnicas do controlo óptimo estocástico e da análise dinâmica das séries temporais que originam.

Uma das vantagens do método é a sua aplicação aos vários modelos escolhidos para representar a economia testando os objectivos políticos que definem a actuação do decisor.

Referimos já a impossibilidade dos resultados do controlo atingirem exactamente os objectivos definidos, devido à presença da parte estocástica do modelo.

No entanto, atribuindo diferentes valores aos elementos da matriz diagonal que designámos por K podemos comparar as possibilidades de aproximação das respostas do controlo aos objectivos a incluir na função de bem estar, analisar vários cenários e discutir a compatibilização de objectivos muitas vezes contraditórios, antes e, se necessário, durante o processo de controlo.

O mesmo se aplica à escolha e comparação da eficácia dos vários instrumentos que podemos ou não incluir no vector de estado, y_t, garantindo sempre o cumprimento da regra definida por Tinbergen.

Tendo presente esta regra definimos a condição necessária e suficiente para a existência de uma solução estacionária da matriz G_t que define a intensidade e forma de utilização dos controlos para correcção dos desvios, a partir do valor absoluto das raízes características da matriz $A+CG$.

O estudo destas raízes características poderá indicar-nos a situação de divergência ou oscilações mais ou menos pronunciadas das trajectórias de controlo, questão estreitamente relacionada com a comparação da eficácia das políticas e até da possível não existencia de políticas adequadas para atingir os objectivos desejados. A possível instabilidade dos controlos terá ainda que ser comparada com o comportamento do sistema antes da aplicação dos controlos.

(1) Chow,(1975), pag.150

(2) Chow,(1973-c), pag.825

(3) Chow, (1981), pag.123

(4) Para aplicação do método a modelos não lineares ver Chow (1973-a), (1975) cap.12, (1976) e (1981) cap.2 - 6 e pontos 15.3.3. e 16.6

(5) outras formas da função objectivo são possíveis, no ponto 5.4.2. apresentamos um exemplo de uma função quadrática não aditiva retirada de Chow (1975) pag. 257; na página 284 da mesma obra o autor introduz a especificidade das funções não quadráticas. Friedman (1972) apresenta uma função quadrática por traços que permite distinguir as variações positivas das negativas.

(6) para o estudo analítico e interpretação económica das equações de controlo ver Martins (1983), cap.VI.

(7) Chow (1972) - pag.394 e (1975) - pag.157

(8) Chow (1973-c) - pag.827 e (1975) - pag.176

(9) Matriz **Ricatti** de fácil resolução já que H_t é uma matriz simétrica - vantagem de calculatória quando comparada com a resolução simultânea do sistema construido pela derivação da Lagrangeana - ver Chow(1975), pag.160

(10) Chow (1975) pag.167

(11) Chow (1975) pag.169

(12) Chow (1975) pag. 213

(13) Chow (1975) pag.258

(14) Chow (1981) pag.244

6. EXEMPLO DE APLICAÇÃO EMPÍRICA DA METODOLOGIA DE CHOW

Como ensaio de ilustração empírica da metodologia proposta por G.Chow com aplicação à política económica seguida em Portugal na última década, uma vez que não dispomos de um modelo estimado que caracterize a sua evolução nem da quantificação exacta dos objectivos que orientaram as medidas dos sucessivos governos, escolhemos o método exposto no ponto 5.5. deste trabalho.

Utilizando as Contas Nacionais portuguesas para o período de 1977-80, a preços de 1980 seleccionámos para variáveis objectivoos valores do **PIBpm** e do **saldo da balança comercial** (exportações-importações de bens e serviços) e para controlos os valores dos **impostos directos** e ainda o montante **oferta de moeda** (M_2) indicado nos Relatórios do Banco de Portugal para o mesmo período.

O nosso objectivo será a determinação das tendências e possível quantificação dos referidos objectivos e dos controlos adequados para os atingir.

Considerando (para o ano t)

R = PIB pm

S = Saldo da Balança Comercial

M = Oferta de Moeda (M_2)

T = Impostos Directos

Teremos como vector de controlo

$$x_t = \begin{bmatrix} M_t \\ T_t \end{bmatrix}$$

a determinar pela equação de controlo

$$x_t = G_t y_{t-1} + g_t$$

onde

$$y_t = \begin{bmatrix} R_t \\ S_t \\ M_t \\ T_t \end{bmatrix}$$

Para representação do sistema económico utilizamos o modelo

$$y_t = A_t y_{t-1} + C_t x_t + b_t$$

e o objectivo

$$\text{Min E } W = \sum_{t=1977}^{1986} (y_t - a_t)' K_t (y_t - a_t)$$

sendo

a_t = objectivos desejados para o valor do PIBpm e do Saldo da Balança que orientaram os controlos sobre a oferta de moeda e os impostos directos.

K_t = matriz diagonal das ponderações atribuidas a esses objectivos que deverá respeitar a condição

tr $K \leq$ Número de objectivos

Como ponto prévio para aplicação da metodologia calculamos as matrizes **A, C e G** e os respectivos vectores **b e g** a partir das séries de valores observados para os objectivos e os controlos pelo método dos mínimos quadrados e admitimos uma matriz K com igual ponderação para os dois objectivos . (Anexo I)

Seguindo os quatro passos indicados no método referido obtemos após a primeira iteracção os dados que apresentamos no Anexo II. A repetição do processo conduz-nos à revisão das estimativas iniciais e à quantificação dos objectivos apresentados no vector **a** (Anexo III):

PIBpm = 182 368.754 e

Saldo da Balança = 94 727.722

Como seria de prever os sinais destes objectivos são positivos, i.e. os nossos governos têm procurado uma variação positiva quer do PIBpm quer do saldo da balança comercial. Os resultados obtidos apontam até para uma tendência bem "ambiciosa" desses objectivos o que, com todas as reservas que os números nos merecem, não contradiz os discursos nem as intenções manifestadas pelos sucessivos governos.

As contradições aparecem quando verificamos que, pelos dados obtidos para a matriz **G** e o vector **g**

$$M_t = -0.752\ R_{t-1} - 0.627\ S_{t-1} + 7710.478$$
$$T_t = -0.114\ R_{t-1} - 0.094\ S_t + 14.617$$

para se seguir essa tendência dos objectivos seria necessária a diminuição dos controlos, tendência que as séries dos valores reais observados apontam nem sempre ser respeitada.

Pelos montantes obtidos para o vector **g** podemos acrescentar que parece ser elevado o efeito que as variáveis exógenas, não sujeitas a controlo, têm sobre a oferta de moeda (7710.478), e bastante reduzido o seu efeito sobre os impostos indirectos (14.617).

Reparemos ainda nos valores obtidos para as matrizes K na primeira e segunda iteracção. Respeitam a condição de manterem traços ≤ 2 (número de objectivos).

No final da primeira iteracção aparece-nos mais valorizada a vontade de se aumentar o PIB (1.397) do a preocupação com o saldo da Balança (0.217). A segunda iteracção aponta para uma situação inversa de maior valorização do saldo da balança comercial (1.412) do que do PIB (0.074).

Com todas as reservas que um exemplo tão limitado nos merece, arriscamos uma comparação com a alternância de ênfase nos objectivos da política económica dos vários governos, apresentando uns como prioridade o crescimento económico e outros mostrando-se mais preocupados com o desequilíbrio das contas externas.

Outros ensaios seriam possíveis e teria interesse continuar o processo iterativo, analisar as raízes características da matriz R=A+CG, procurando encontrar explicações para a quantificação dos objectivos, a, que aparecem exagerados, avaliar a política económica pela comparação dos controlos óptimos obtidos com os seguidos na prática, testar outros cenários de objectivos, respectivas ponderações e controlos, e tentar responder às 7 questões relevantes para a política económica colocadas por Chow através dos instrumentos do controlo óptimo estocástico (1). Não foi esse o nosso objectivo no âmbito deste trabalho. Quizemos apenas apresentar um pequeno exemplo de ilustração de algumas das possibilidades que a metodologia de G. Chow nos fornece.

(1) Problemática também analisada pelo Prof. Victor Martins (1983) com dados da economia portuguesa para o período de 1953-73.

ANEXO I

$$A = \begin{bmatrix} 0.834 & 0.201 & 0.000 & 0.000 \\ -1.435 & 0.774 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0.127 & -0.972 \\ -0.143 & 4.776 \\ 1.000 & 0.000 \\ 0.000 & 1.000 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 2.136 & 0.061 & 0.000 & 0.000 \\ 0.388 & -0.046 & 0.000 & 0.000 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 305.535 \\ 886.755 \\ 0.000 \\ 0.000 \end{bmatrix}$$

$$g = \begin{bmatrix} -1230.684 \\ -264.696 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 1,000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 1.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \end{bmatrix}$$

ANEXO II

$$A = \begin{bmatrix} 0.771 & 0.274 & 0.000 & 0.000 \\ -1.357 & 1.018 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0.127 & -0.972 \\ -0.143 & 4.776 \\ 1.000 & 0.000 \\ 0.000 & 1.000 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} -5.545 & -3.662 & 0.000 & 0.000 \\ 0.134 & -0.272 & 0.000 & 0.000 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 305.535 \\ 886.755 \\ 0.000 \\ 0.000 \end{bmatrix}$$

$$g = \begin{bmatrix} -1230.684 \\ -264.696 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 1,397 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.217 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \end{bmatrix}$$

ANEXO III

$$A = \begin{bmatrix} 1.307 & 1.129 & 0.000 & 0.000 \\ -1.964 & -0.819 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 23.840 & -146.334 \\ -9.784 & 56.290 \\ 1.000 & 0.000 \\ 0.000 & 1.000 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} -0.752 & -0.627 & 0.000 & 0.000 \\ -0.114 & -0.094 & 0.000 & 0.000 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 395.615 \\ 828.304 \\ 0.000 \\ 0.000 \end{bmatrix}$$

$$g = \begin{bmatrix} 7710.478 \\ 14.617 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 0,074 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 1.412 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \end{bmatrix}$$

$$a = \begin{bmatrix} 182\ 368.754 \\ 94\ 727.722 \end{bmatrix}$$

CONCLUSÃO

A utilização das técnicas matemáticas do controlo óptimo em questões da esfera económica permite-nos determinar de forma sistemática e muitas vezes quantificada a melhor actuação de um decisor que, conhecendo os objectivos, procura optimizar a trajectória de um sistema económico, caracterizado por determinado estado e comportamento. Tendo presente a interdependência temporal das decisões, i.e. a influência das decisões sobre os controlos na alteração do sistema, procura-se a optimização que permita um equilíbrio entre os efeitos imediatos e os futuros, integrando estratégias de curto e médio ou longo prazo, conforme o horizonte definido.

No entanto, o controlo óptimo surge e desenvolve-se primeiro em ciências "exactas" sem carácter social onde a continuidade de sistemas e controlos é uma hipótese realista e o método do Cálculo de Variações conduz directamente a soluções de fácil interpretação. Em economia a utilização deste método e das hipóteses que lhe estão subjacentes são possíveis de admitir mas sobretudo em problemas teóricos, nomeadamente em modelos de crescimento que quase sempre se formulam de forma contínua e não requerem uma resolução numérica.

Com hipóteses menos restritivas desenvolveu-se um segundo método para resolução dos problemas de controlo óptimo - O Princípio de Pontryagin que embora ainda apresente muitas dificuldades de calculatória e definição das variáveis tem muitas semelhanças com a programação matemática e permite alargar o campo de aplicação e interpretação em termos económicos. Formulado de inicio apenas como condição necessária de optimo este Principio tem merecido a atenção de muitos autores e o estudo das situações em que ele se apresenta também como condição suficiente continua a ser uma área a desenvolver não apenas em termos matemáticos e teóricos mas, procurando simplificar os cálculos e alargar o campo de aplicação e interpretação dos resultados que fornece.

Enquanto método mais geral, aplicável a qualquer problema que apresente uma natureza sequencial, mesmo que não seja de controlo óptimo, a Programação Dinâmica permite-nos ultrapassar muitas das dificuldades que surgem com a aplicação dos métodos anteriores. Com a vantagem de nos permitir construir algoritmos válidos tanto em termos contínuos como discretos é muitas vezes o método preferido pelos economistas sobretudo quando o objectivo é a obtenção de uma solução numérica de problemas empiricos que normalmente se formulam de forma discreta.

A aplicação destes métodos a problemas estocásticos permite a conjugação das técnicas de controlo óptimo com os resultados da econometria e do estudo dinâmico das séries temporais e aumenta as áreas e possibilidades de utilização do controlo óptimo, nomeadamente na esfera económica. Não conseguindo eliminar totalmente a incerteza inerente a um processo de decisão de actuações sobre sistemas económicos o controlo estocástico engloba essa incerteza nos cálculos e permite-nos durante o processo de controlo a reformulação dos objectivos e das trajectórias de controlo de acordo com os sucessivos estados de caracterização do sistema. É um campo em franca expansão e as técnicas do controlo óptimo estocástico são utilizadas em muitos problemas das mais variadas áreas com metodologias do tipo da apresentada neste trabalho para o estudo da política económica que teria interesse comparar. É frequente as metodologias virem acompanhadas de programas informáticos que possibilitam uma busca mais sistemática de cenários e soluções alternativas .

Numa época em que aumenta a consciencialização da escassez dos recursos disponíveis, da necessidade premente da sua utilização racional e da interdependência temporal das decisões, as técnicas de controlo óptimo revelam-se de particular utilidade permitindo uma maior sistematização da informação, da escolha das alternativas de decisão e maior flexibilidade dos controlos para corresponderem às reacções dos sistemas.

BIBLIOGRAFIA

1.ABEL, A. (1975) - "A Comparison of Three Control Algorithms to the Monetarist-Fiscalist Debate", Annals of Economics and Social Measurement, vol.4, Nº 2, pag.239-252

2.ALBOUY, M. (1972) La Régulation Economique dans L'Entreprise, Paris, Dunod

3.ALBOUY et BRETON (1968) - "Interprétation économique du principe du maximum de Pontryaginy, RIRO, Nº 14

4.ALLEN, R.G. (1956) - Mathematical Economics, London, MacMillan

5.AMARAL, J.F. (1977) - "Um modelo simples de crescimento económico", Economia, vol.I, Nº 3, pag. 457-468

6.AMARAL, J.F. (1979) - "Crescimento económico óptimo", Economia, vol.III, Nº 2, pag.265-279

7.AOKI, M. (1977) - Optimal control and System Theory in Dynamic Economic Analysis, 2ªedição (1ª em 1976), New York, North-Holland

8.AOKI, M. e MARZOLLO, A. editores (1979) - New Trends in Dynamic System Theory and Economics, New York, Academic Press

9.ARMAND, R. (1968-a) - "La décentralisation par les prix", METRA, vol. VII, Nº 1

10.ARROW, K. (1967) - "Applications of Economic Theory to Economic Growth", Institute for Mathematical Studies in the Social Sciences, Stanford University, Technical Report 2, pag.85-119

11.ARMAND, R. (1968-b) - "Interprétation économique du principe du maximum de Pontryagin", METRA, Vol. VII, Nº 3 pag.495-510

12.ATHANS, M. (1972) - "The discrete Time Linear-Quadratic-Gaussian Stochastic Control Problem", Annals of Economic and Social Measurement, Vol.1, Nº4, pag.449-492

13.AUBIN, P. (1968) - Caracterization of the sets of constrains for which the necessary conditions for optimization problems hold, University of Wisconsin

14. BAR-SHALOM e TSE,E. (1976) - "Caution, Probing and the Value of Information in the Control of Uncertain Systems", Annals of Economic and Social Measurement, vol.5, Nº e2, pag.323-338

15.BAUMOL, W.J. (1970) - Economic Dynamics - an introduction, London, The MacMillan Company

16.BECK, M. (1981-a) - "Operational Estimation and Prediction of Nitrification Dynamics in Activated Sludge Process", Water Research, vol.15,(Reeditado em 1982 pelo International Institute for Applied System Analysis, Laxenburg, Austria)

17.BECK, M. (1981-b) - "Systems Engineering and Microelectronics in Water Quality Management", F. Fallside editor, Microelectronics in the Wter Industry, suplemento do Journal of the Institution of Water Engineers and Scientists (Reeditado em 1982 pelo International Institute for Applied System Analysis, Laxenburg, Austria)

18.BENSOUSSAN,A., KLEINDORFER,P. e TAPIERO,C. (1980) - editores, Applied Stochastic Control in Econometrics and Management Science, North-Holland Publishing Company

19.BELLMAN, R. (1971) - Introduction to the Mathematical Theory of Control Processes, vol.II - Nonlinear Processes, New York and London, Academic Press

20.BOWMAN, W. e LAPORTE,A. (1972) - "Stochastic Optimization in Recursive Equation Systems and Random Parameters", Annals of Economic and Social Measurement, vol.1, Nº4, pag.419-436

21.BRAY, J.(1974) - "Predictive Control of a Stochastic Model of the U.K. Economy Simulating Present Policy Making Practice by the U.K. Government", Annals of Economic and Social Measurement, vol.3, Nº1, pag.239-256

22.BROCK, W.A. e SCHEINKMAN, J.A. (1976) - "Global Asymptotic Stability of Optimal Control Systems with Applications to the Theory of Economic Growth", Journal of Economic Theory, vol.12 Nº 1, pag.191-196

23.BURMEISTER,E., JACKSON,J. e ROSS,S. (1977) - "The evaluation of simple and optimal decision rules with misspecified welfare functions" in Applications of Control Theory to Economic Analysis, Pitchford e Turnovski ed. North-Holland

24.CHOW, G.C. (1960) - "Tests of Equality between Sets of Coeficients in Two Linear Regressions", Econometrica, vol.28, nº3, pag.591-605

25.CHOW, G.C. (1964) - "A Comparision of Alternative Estimators for Simultaneous Equations", Econometrica, vol.32, nº4, pag.532-53

26.CHOW, G.C. (1966) - "On the Long-Rum and Short-Run Demand for Money", The journal of Political Economy, vol.74, nº 2, pag.111-31

27.CHOW, G.C. (1967-a) - "Multiplier, Accelerator, and Liquidity Preference in the Determination of National Income in the United States", The Review of Economics and Statistics, vol.49, nº1, pag.1-15

28.CHOW, G.C.(1967-b) - "Technological Change and the Demand for Computers", The American Economic Review, vol.57, nº5, pag.1117-30

29.CHOW, G.C. (1971) - "Best Linear Unbiased Interpolation, Distribution and Extrapolation of Time Series by Related Series", The Review of Economics and Statistics, vol.53, nº4, pag.372-75

30.CHOW, G.C. (1972) - "How Much Could be Gained by Optimal Stochastic Control Policies", Annals of Economic and Social Measurement, vol.1, nº4, pag.391-406

31.CHOW, G.C. (1973-a) - "On the Computation of Full-Information Maximum Likelihood Estimates for Nonlinear Equation Systems", The Review of Economics and Statistics, vol55, nº1, pag.104-9

32.CHOW, G.C. (1973-b) - "Effect of Incertainty on Optimal Control Policies", International Economic Review, vol.14, nº3, pag.632-45

33.CHOW, G.C. (1973-c) - "Problems of Economic Policy from the Viewpoint of Optimal Control", The American Economic Review, vol.58, nº5, pag.825-37

34.CHOW, G.C. (1974) - "A Family of Estimators for Simultaneous Equation Systems", International Economic Review, vol.15, nº3, pag.654-66

35.CHOW, G.C. (1975) - Analysis and Control of Dynamic Economic Systems, New York, John Wiley and Sons

36.CHOW, G.C. (1976) - "The Control of Nonlinear Economic Systems with Unknown Parameters", Econometrica, vol.44, nº4, pag.685-96

37.CHOW, G.C. (1981) - Econometric Analysis by Control Methods, New York, John Wiley and Sons

38.CHOW, G.C. (1985-a) - Econometrics, McGraw-Hill International Book Company (1ª edição em 1983)

39.CHOW, G.C. (1985-b) - "A Model of Chinese National Income Determination", Journal of Political Economy, vol.93, nº4, pag.782-92

40.CHOW, G.C. e FAIR, R.C. (1973) - "Maximum Likelihood of Linear Equation Systems with Auto-regressive Residuals", Annals of Economic and Social Measurement, vol.2, nº1 pag.17-28

41.CLARK,C.W. e DE PREE,J.D. (1979) - "A Simple Linear Model for the Optimal Exploitation of Renewable Resources",Applied Mathematics and Optimisation, Nº5, pag.181-196

42.DORFMAN, R. (1969) - "An Economic Interpretation of Optimal Control Theory", The American Economic Review, vol.59, Nº5, pag.817-833

43.FAIR,R. (1974) "On the solution of Optimal Control Problems as Maximization Problems", Annals of Economic and Social Measurement, vol.3, Nº1, pag.135-154

44.FORSTER, B. (1977) -"On a one state variable optimal control problem and Consumption-pollution trade-offs" in Applications of Control Theory to Economic Analysis Pitchford e Turnovski ed. North-Hollad

45.FRIEDMAN, B.M. (1972) - "Optimal Economic Stabilization Policy: an extended framework", Journal of Political Economy, vol.80, nº5, pag.1002-22

46. GANDOLFO, G. (1971) - Economic Dynamics: Methods and Models, Noth -Holland Publishing Company

47.GARBADE,K. (1975) -"Discretion in the Choice of Macroeconomic Policies", Annals of Economic and Social Measurement, vol.4, Nº2, pag.215-238

48.HALKIN, H. (1974) - "Necessary Conditions for Optimal Control Problems with Infinite Horizons", Econometrica, vol.42, Nº 2, pag.267-272

49.HELMER, J-Y. (1972) - La Commande Optimale en Economie - Applications à l'Economie et à la Recherche Opérationnelle du Calcul des Variations, du Principe de Pontryagin et de la Programmation Dynamique, Paris, Dunod

50.HENDERSON,D. e TURNOVSKY,S. (1972) - "Optimal Macroeconomic Policy Adjustment under Conditions of Risk", Journal of Economic Theory, vol.4, pag.58-71

51.HOLLBROOK, R. (1973)- "A Practical Method for Controlling a Large Nonlinear Stochastic System", Annals of Economic and Social Measurement, vol.3, Nº1, pag.155-176

52.HOLLY,S., RUSTEM,B. e ZARROP,M. editores (1979) - Optimal Control for Econometric Models - An Approach to Economic Policy Formulation, St.Martin's Press, New York

53.INTRILIGATOR, M.D. (1971), Mathematical Optimizations and Economic Theory, Prentice Hall, ed. Englewood Clifs, N.J.

54.KAMIEN, M. e SCHARTZ, N. (1983), Dynamic Optimazation - The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management, 3ªa edição, (1ª em 1981), New York, North-Holland

55. KENDRICK, D. (1976) - "Applications of Control Theory to Macroeconomics", Annals of Economic and Social Measurement, vol.5, Nº2, pag.171-190

56.KENDRICK,D.(1981) - Stochastic Control for Economic Models, McGraw-Hill Book Company, New York

57.KURZ, M. (1968) - "Optimal Economic Growth and Wealth Effects", International Economic Review, vol. 9, Nº 3, pag.348-357

58.LEE et MARCUS (1965) - Foundations of Optimal Control Theory, John Wiley and Sons, New York

59.LIANG-TSEN FAN (1966) - The continuos maximum principle: a study of complex systems optimisation, John Wiley and Sons, New-York

60.LIANG-TSEN FAN and CHIU-SEN WANG (1964) - The discrete maximum principle: a study of multistage systems optimisation, John Wiley and Sons, New York

61.LIVESEY, D. (1975) - "Optimizing Short-Term Economic Policy" The Economic Journal, vol.81, pag.525-546

62. LONG, N.V. (1977) - "Optimal Exploitation and replenishment of a Natural Resource" in Applications of Control Theory to Economic Analysis, Pitchford e Turnovski ed. North-holland

63.LOPES, R.J. (1981) - Theorie Economique des Ressources Naturelles Renouvelables, thése de 3ème Cycle, Paris

64.LOPES, R.J. (1985) - L'Economie des Ressources Renouvelables, Paris, Economica

65.LOPES, R.J. (1987) - O Princípio de Pontryagin e a sua Interpretação Económica, Cemapre, doc.nº 24, ISE, Lisboa

66.MARTINS, M.M. (1983) - Regulação nos Modelos Macroeconómicos, Dissertação apresentado no ISE para otenção do grau de doutoramento, Lisboa

67. MILNE, F. (1977) - "The adjustment cost problem with jumps in the state variable" in Applications of Control Theory to Economic Analysis, Pitchford e Turnovski ed., North-Holland

68.MILLER, R.E. (1979) - Dynamic Optimization and Economic Applications, McGraw Hill

69.MURATA, Y. (1977) - Mathematics for Stability and Optimization of Economic Systems, Academic Press, New York

70.OWENS, D.H. (1981) - Multivariable and Optimal Systems, Academic Press, London

71.PAGAN,A. (1975) - "Optimal Control of Econometric Methods with Autocorrelated Disturbance Terms", International Economic Review, vol.16, Nº1, pag.258-263

72.PALASH,C. (1977) - "On the Specification of Unumployment and Inflation in the Objective Function" Annals of Economic and Social Measurement, vol.6, Nº3, pag.275-300

73.PHELPS,E. e TAYLOR, J. (1977) - "Stabilizing Properties of Monetary Policy under Rational Price Expectations", Journal of Polictical Economy, vol.85, pag.163-190

74.PINDYCK, R. (1973) - Optimal Planning for Economic Stabilization, North-Holland, Amsterdam

75.PINDYCK, R. e ROBERTS,S.(1974) - "Optimal Policies for Monetary Control",Annals of Economic and Social Measurement, vol.3, Nº1, pag.207-238

76.PITCHFORD, J.D. e TURNOVSKI, S.J. editores (1977) - Applications of Control Theory to Economic Analysis, North-Holland

77.PLOURDE, C.G. (1970) - " A Simple Model of Replenishable Natural Resource Exploitation", The American Economic Revue, vol. 60, Nº 3, pag.518-521

78.PONTRYAGIN, L., e outros (1956) - Sobre a teoria dos processos optimos, Academia de Ciências da URSS, vol. 110, Nº1

79.PRESCOTT, E. (1972) - "The Multi-period Control Problem under Uncertainty", Econometrica, vol.40, pag.1043-1058

80.PRESTON, A. e SIEPER, E. (1977) - "Policy Objectives and Instrument Requirements for a Dynamic Theory of Policy" in Applications of Control Theory to Economic Analysis, Pitchford e Turnovski ed. Noth Holland

81.SARGENT, T. e WALLACE N. (1975) - "Rational Expectations, the Optimal Monetary Instrument and the Optimal Money Supply Rule", Journal of Political Economy, vol.83, pag.241-254

82.SCHEINKMAN, J.A. (1978) - "Stability of Separable Hamiltonians and Investment Theory", The Review of Economic Studies, vol.45, (3), Nº141, pag.559-570

83.SEIERSTAD, A. e SYDSAETER, K. (1987) - Optimal Control Theory with Economic Applications, North Holland

84.SEIERSTAD, A. e SYDSAETER, K. (1977) - "Sufficient Conditions in Optimal Control Theory", International Economic Review, vol.18, Nº2, pag.367-391

85.SHUPP, F. (1972) - "Uncertainty and Stabilization Policies for a nonlinear Macroeconomic Model", The Quarterly Journal of Economics, vol.80, Nº1, pag.94-110

86.SHUPP, F. (1976) - "Optimal Policy Rules for a Temporary Incomes Policy", The Review of Economic Studies, vol.43, Nº2, pag.249-459

87.SILVA, M.M. (1974) - Análise Sistémica, Modelização Social e Planificação, Lisboa, Gabinete de Investigações Sociais

88.SMITH, V.L. (1968) - "Economics of Production from Natural Resources", The American Economic Review, Nº 58, pag.409-431

89.TAVARES, L. V. e outros (1986) - "A decision support system (DSS) for power generation", European Journal of Operational Research, vol.25, nº3, pag.373-94

90.TAVARES, L.V. e outros (1986) - "Multicriteria scheduling of a railway general program", European Journal of Operational Reseach, vol25, nº3, pag.395-405

91.TAYLOR, J.B. (1974) - "Assimptotic Properties of Multiperiod Control Rules in the Linear Regression Model", International Economic Review, vol.15, Nº2, pag.472-482

92.TURNOVSKY, S. (1973) - "Optimal Stabilization Policies for Deterministic and Stochastic Linear Systems", The Review of Economic Studies, vol.40, Nº121, pag.79-96

93.TURNOVSKY, S. (1974) - "Stability Properties of Optimal Economic Policies", The American Economic Review, vol.44, pag.136-147

94.TURNOVSKY, S.J. (1976) - "Optimal Stabilization Policies for Linear Stochastic Systems: the case of correlated multiplicative and additive disturbances", Review of Economic Studies, vol.43, nº1, pag 191-4

95. TURNOVSKY, S.J. (1977) - Macroeconomic Analysis and Stabilization Policy, London, Cambridge University Press

96.TUSTIN, A. (1956) - The Mechanism of Economic Systems, Heinmann, London

97.VOUSDEN, N. (1977) - "Resource depletion with possible non-convexities in production", in Applications of Control Theory to Economic Analysis, Pitchford e Turnovski ed., North-Hollad

pag. INDICE